Transformation

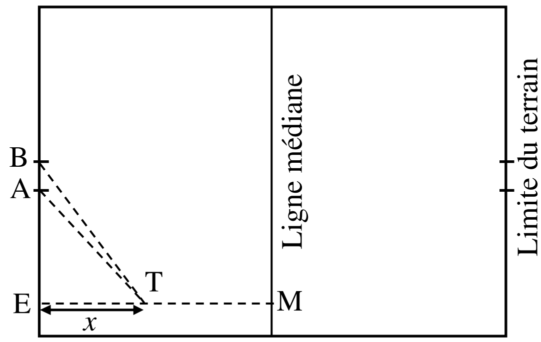
Niveau : terminale générale, spécialité. Adapté de l'exercice 4 bac S métropole 2016.

Lien avec le programme : fonctions sinus et cosinus, calcul de dérivées, étude d'une fonction.

Lien avec Les maths au quotidien : Sport.

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Terrain vu du dessus



Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

3. Montrer que $\tan \gamma = \frac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

4. a. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Justifier que cela correspond à un maximum sur l'intervalle]0 ; 50] de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

b. Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0, 01 radian près, puis au degré près.