

Tour de magie

Niveau : terminale générale, maths expertes.

Lien avec le programme : congruences, division euclidienne, algorithmique, équation $ax + by + c = 0$, théorème de Gauss.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Loisirs.

Exercice 2 du sujet de bac de Polynésie, juin 2014.

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare :

« Votre anniversaire tombe le 1^{er} août ! ».



1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.
b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$ (programme de calcul (B)).

On étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :

On considère l'algorithme suivant :

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que : $12j + 31m = 503$.

```
Pour m allant de 1 à 12 faire :  
  Pour j allant de 1 à 31 faire :  
    z ← 12j + 31m  
    Afficher z  
  Fin Pour  
Fin Pour
```

2. Deuxième méthode :

- a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
- b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.
- c. En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur qui a obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :

- a. Démontrer que le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.
- b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.
- c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$.
- d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leq y \leq 12$.
En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur qui obtient le nombre 503 avec le programme de calcul (B).