DEUX CÉLÈBRES SUITES
Histoire des mathématiques

Niveau : première technologique ou générale. **TP - Tableur**

Lien avec le programme : Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation de récurrence. Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite. Utilisation d'un tableur. Suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques. Calculer un terme de rang donné d'une suite. Déterminer une liste de termes d'une suite et les représenter.

Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil. Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Lien avec Les maths au quotidien : Nombre d'Or, Société.

COMPETENCES ATTENDUES
Se référer à la fiche de compétences.

	–			+
Chercher C1				
Modéliser C2				
Représenter C3				
Calculer C4				
Raisonner C5				

I- <u>La suite de Fibonacci</u>

Cette suite doit son nom au mathématicien italien Leonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de *Fibonacci* (1170-1250). Elle apparaît dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrivant la croissance d'une population de lapins.
Dans la situation de départ, il y a un couple de jeunes lapins. Ce couple donne naissance, chaque mois, dès son troisième mois d'existence, à un nouveau couple de lapins. Le premier mois (mois 0), nous avons donc un couple de jeunes lapins ; le second mois (mois 1), ce couple n'est pas en âge de procréer donc il y a toujours un couple de lapins (devenu adulte). Le troisième mois (mois 2), ce couple donne naissance à un couple de lapins (juvénile), etc.
Combien y aura-t-il de couples de lapins au bout d'un an ?

La suite de Fibonacci donne le nombre de couples de lapins chaque mois.

mois 0	mois 1	mois 2	…
1 couple juvénile	**1 couple adulte**	**1 couple adulte + 1 couple juvénile**	

1. a. Fournir les cinq premiers termes de la suite. **C2**

Modéliser la situation à l'aide d'une suite (u_n) définie par récurrence.

	A	B
1	n	un
2	0	1
3	1	1
4	2	2
5	3	3
6	4	
7	5	

b. On cherche à automatiser le calcul des termes de la suite avec un tableur.
Recopier ce tableau sur un tableur, en écrivant une formule en B4 qui sera étirée vers le bas. **C4**
Quelle est la formule à écrire en cellule B4 ?
À l'aide du tableur, retrouver le 20^{e} terme de la suite.

c. La suite de Fibonacci commence par les termes 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 **C1**
- Quelle colonne correspond aux mois dans cette modélisation ?
- Combien y a-t-il de couples de lapins au bout de 10 mois ?
- Répondre à la question posée dans le texte d'introduction.

2. a. On note $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Calculer $\frac{u_1}{u_0}$. **C4**

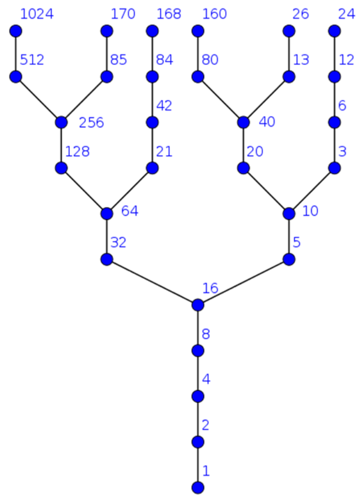
b. Dans la case C4, calculer le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ à l'aide d'une formule tableur.

Quelle formule avez-vous utilisée ? **C4**

Recopier cette formule jusqu'à la case C21. Que constatez-vous ? **C1**

c. Ce rapport se rapproche du nombre d'Or. Faire une brève recherche Internet sur le nombre d'Or. **C1**

II- <u>La suite de Syracuse</u>



Le problème qui va suivre, appelé **conjecture de Syracuse**, a été proposé en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, L. Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse. Ce dernier le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse : la suite de Collatz prit alors le nom de « suite de Syracuse ».

Partie A

Dans cette suite, chaque terme se déduit du précédent par le procédé suivant :
- Si le terme est pair, alors on le divise par 2.
- Si le terme est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

On note (u_n) le terme de rang n de cette suite de nombres.

1. Choisir un nombre de départ u_0 de votre choix et calculer plein de termes de la suite. **C4**

2. **a.** Echanger avec les copains à proximité sur les résultats obtenus. **C6**

b. Quelle conjecture peut-on faire concernant le comportement de cette suite ? **C1**

Partie B - Le vol de la suite – Avec un tableur

	A	B	C
1	n	u(n)	
2	0	15	
3	1	=SI(MOD(B2;2)=0;B2/2;3*B2/2)	
4	2		

1. **a.** On considère la suite de Syracuse démarrant par 15.
Calculer les premiers termes de cette suite avec le tableur, en utilisant la formule indiquée et en étirant vers le bas. **C4**

b. Expliquer pourquoi cette formule permet de calculer les termes de la suite. **C5**

Remarque : on peut remplacer l'instruction MOD(A1;2)=0 par A1/2=ENT(A1/2).

c. Recopier cette formule jusqu'à la cellule A25. **Que remarque-t-on ?** **C1**

2. Représenter graphiquement cette suite avec le tableur. **C3**

3. Refaire les questions **1.** et **2.** en démarrant de 27 et en étirant jusqu'à la cellule A115.

La conjecture de Syracuse peut s'énoncer comme suit : « Quel que soit le premier terme de la suite de Syracuse, celle-ci atteint toujours 1 puis le cycle 1 ; 4 ; 2. ». Personne n'a pu la démontrer jusqu'à présent.

L'observation graphique de la suite pour u_1 = 15 et pour u_1 = 27 montre que la suite peut s'élever assez haut avant de retomber. Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parlera du **vol** de la suite.
On appelle « **temps de vol** » le nombre de termes de la suite avant que la suite n'atteigne le nombre 1.
On appelle « **altitude maximale** » la plus grande valeur que peut prendre cette suite.

4. Pour u_0 = 15 et u_0 = 27, quelles sont les temps de vol et les altitudes maximales ? **C1**

Point info :

Le mathématicien David Bařina a vérifié la conjecture pour les valeurs du premier terme jusqu'à 452×2^{60} soit $5{,}211\times10^{20}$. Au-delà du problème en lui-même, le calcul des termes de toutes ces suites a eu des retombées indirectes : il a permis de concevoir une nouvelle méthode de multiplication, une technique de marquage d'images pour les signer et les protéger de la copie, une méthode de chiffrage des fichiers sonores et un générateur de suites pseudoaléatoires. (Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* N° 529, octobre 2021).

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.
La conjecture des hirondelles, roman de Thierry Lefebvre, a été publié en 2021 sur la base de cette légende urbaine. Il met en scène un jeune mathématicien ukrainien chargé de trouver un contre-exemple à la conjecture afin de démontrer la supériorité informatique de l'Union Soviétique.

DEUX CÉLÈBRES SUITES

Histoire des mathématiques

Niveau : première technologique ou générale. **TP - Python**

Lien avec le programme : Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation de récurrence. Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite. Suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques. Calculer un terme de rang donné d'une suite. Déterminer une liste de termes d'une suite et les représenter. Déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite sont supérieurs ou inférieurs à un seuil donné.
Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.
Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil. Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Lien avec Les maths au quotidien : Nombre d'Or, Société.

COMPETENCES ATTENDUES
Se référer à la fiche de compétences.

	–			+
Chercher C1				
Modéliser C2				
Représenter C3				
Calculer C4				
Raisonner C5				

II- <u>La suite de Fibonacci</u>

Cette suite doit son nom au mathématicien italien Leonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de *Fibonacci* (1170-1250). Elle apparaît dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrivant la croissance d'une population de lapins.
Dans la situation de départ, il y a un couple de jeunes lapins. Ce couple donne naissance, chaque mois, dès son troisième mois d'existence, à un nouveau couple de lapins. Le premier mois (mois 0), nous avons donc un couple de jeunes lapins ; le second mois (mois 1), ce couple n'est pas en âge de procréer donc il y a toujours un couple de lapins (devenu adulte). Le troisième mois (mois 2), ce couple donne naissance à un couple de lapins (juvénile), etc.
Combien y aura-t-il de couples de lapins au bout d'un an ?

La suite de Fibonacci donne le nombre de couples de lapins chaque mois.

mois 0	mois 1	mois 2	…
1 couple juvénile	**1 couple adulte**	**1 couple adulte + 1 couple juvénile**	

1. a. Fournir les cinq premiers termes de la suite. **C2**

Modéliser la situation à l'aide d'une suite (u_n) définie par récurrence.

b. On cherche à automatiser le calcul des termes de la suite avec un programme.
Recopier cet algorithme dans un fichier Python, en le complétant adéquatement.
On pourra nommer ce fichier **fibo.py**. **C2**
A l'aide du programme, retrouver le $20^{\text{ème}}$ terme de la suite. **C4**

```
def Fibo(n):
  a=1
  b=1
  for i in range(1,n):
     u=………
     a=……..
     b=……..
  print(u)
```

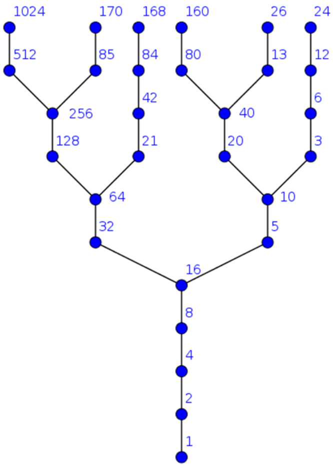
c. La suite de Fibonacci commence par les termes 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 **C1**
- Combien y a-t-il de couples de lapins au bout de 10 mois ?
- Répondre à la question posée dans le texte d'introduction.

2. a. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche les rapports $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_2}$, …, $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ pour une valeur de *n* supérieure à 2 entrée par l'utilisateur. **C2**

b. Tester pour *n* = 20. Que constatez-vous ? **C4**

c. Ce rapport se rapproche du nombre d'Or. Faire une brève recherche Internet sur le nombre d'Or. **C1**

II- <u>La suite de Syracuse</u>



Le problème qui va suivre, appelé **conjecture de Syracuse**, a été proposé en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, L. Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse. Ce dernier le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse : la suite de Collatz prit alors le nom de « suite de Syracuse ».

Partie A

Dans cette suite, chaque terme se déduit du précédent par le procédé suivant :
- Si le terme est pair, alors on le divise par 2.
- Si le terme est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

On note (u_n) le terme de rang n de cette suite de nombres.

1. Choisir un nombre de départ u_0 de votre choix et calculer plein de termes de la suite. **C4**

2. a. Echanger avec les copains à proximité sur les résultats obtenus. **C6**

b. Quelle conjecture peut-on faire concernant le comportement de cette suite ? **C1**

Partie B - Le vol de la suite – Avec Python

1. a. On considère une suite de Syracuse démarrant par un terme donné.
On va créer avec Python une liste contenant les premiers termes de cette suite. Compléter l'algorithme ci-contre et le programmer dans un fichier Python, que l'on pourra nommer **syracuse1.py**.
On pourra utiliser une instruction du type a%b qui donne le reste de la division de a par b ou bien une instruction du type a = int(a).

```
def syracuse(u,n):
  L = [u]
  for i in range(n) :
    if ....... :
      u = u/2
      L.append(u)
    else:
      u = ...
      L.append(u)
  return L
```

b. Tester syracuse (15, 25). Qu'obtient-on et que **remarque-t-on ?** **C1**

2. Représenter graphiquement cette suite avec Python en modifiant syracuse1.py de la façon ci-contre. On pourra enregistrer sous le nom **syracuse2.py.** **C3**

```
import matplotlib.pyplot as plt
def syracuse(u,n):
      ⋮
  return L
  x=[i for i in range(n+1)]
  plt.plot(x,L)
  plt.show()
```

3. Tester syracuse (27,115) et représenter ces premiers termes. Remarques ?
C1 C3

La conjecture de Syracuse peut s'énoncer comme suit : « Quel que soit le premier terme de la suite de Syracuse, celle-ci atteint toujours 1 puis le cycle 1 ; 4 ; 2. ». Personne n'a pu la démontrer jusqu'à présent.

Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parlera du **vol** de la suite.
On appelle « **temps de vol** » le nombre de termes de la suite avant que la suite n'atteigne le nombre 1.
On appelle « **altitude maximale** » la plus grande valeur que peut prendre cette suite.

4. a. Pour $u_0 = 15$ et $u_0 = 27$, quelles sont les temps de vol et les altitudes maximales (graphiquement) ? **C1**

b. Modifier le premier programme afin qu'il retourne, pour un premier terme donné par l'utilisateur, le temps de vol et l'altitude maximale de la suite de Syracuse. On pourra utiliser une boucle **while**.

Point info :
Le mathématicien David Bařina a vérifié la conjecture pour les valeurs du premier terme jusqu'à 452×2^{60} soit $5{,}211 \times 10^{20}$. Au-delà du problème en lui-même, le calcul des termes de toutes ces suites a eu des retombées indirectes : il a permis de concevoir une nouvelle méthode de multiplication, une technique de marquage d'images pour les signer et les protéger de la copie, une méthode de chiffrage des fichiers sonores et un générateur de suites pseudoaléatoires. (Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science* N° 529, octobre 2021).
Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.
La conjecture des hirondelles, roman de Thierry Lefebvre, a été publié en 2021 sur la base de cette légende urbaine. Il met en scène un jeune mathématicien ukrainien chargé de trouver un contre-exemple à la conjecture afin de démontrer la supériorité informatique de l'Union Soviétique.