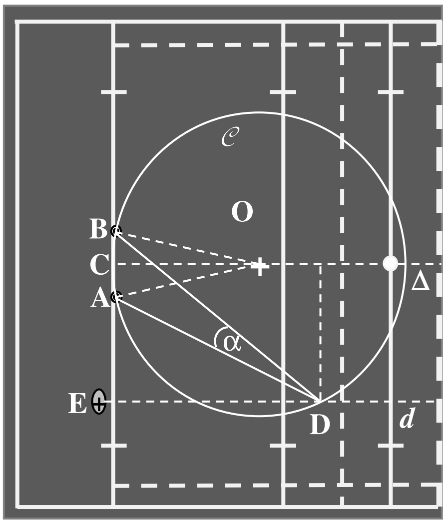
Transformation au rugby

Niveau : Seconde, avec le logiciel GeoGebra, en demi-classe, sur des postes informatiques.

Lien avec le programme : résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles), calculer des longueurs, des angles, traiter de problèmes d'optimisation.
Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.
Prérequis : un autre problème de géométrie : l'établissement du *théorème de l'angle inscrit*.
Variation de la fonction inverse.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Sport / Rugby.



Ce soir, c'est France-Angleterre au stade de France et Michalak marque un essai au point E et rapporte ainsi 5 points supplémentaires à la France. La règle stipule qu'un joueur français doit tenter de transformer l'essai pour marquer 2 points supplémentaires. Pour cela, le ballon doit être posé sur la droite d, perpendiculaire à (AB) passant par E, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. Soit D le point de d où l'on va poser le ballon. On suppose que le buteur n'a pas de problème de puissance. La transformation a le plus de chances de réussir pour une valeur de l'angle $\widehat{ADB}$ maximale (on néglige l'influence de la hauteur prise par le ballon sur l'angle de tir). Notons $\alpha = \widehat{ADB}$ (en degrés).

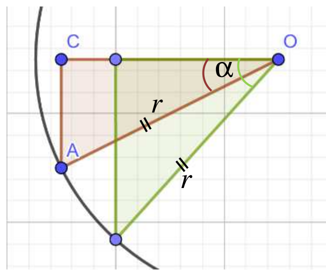
La question est alors : où doit-on placer le ballon ?

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABD.
On appelle C le milieu de [AB] et Δ la droite (CO). [AB] étant une corde du cercle $\mathscr{C}$, Δ est perpendiculaire à (AB) et est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

A. Construction et conjecture avec GeoGebra

1. Construire des points A et B modélisant les pieds des poteaux et construire la droite (AB). Placer un point E (hors de [AB]) modélisant l'endroit d'un essai et construire la droite d.
2. Placer un point D sur la droite d. Construire le cercle circonscrit au triangle ABD.
3. Construire les segments [AD] et [BD] et l'angle $\widehat{ADB}$.
4. Déplacer le point D sur d et conjecturer la configuration rendant $\widehat{ADB}$ maximal.

B. Démonstration



1. Justifier que l'angle α mesure la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. Écrire CA en fonction de r et de α, où r est le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. On admet ici que dans un triangle rectangle, α est maximal quand sin α est maximal (pour une hypoténuse de même longueur, plus l'angle α est grand et plus le côté opposé est grand, voir figure).
   Justifier que α est maximal quand r est minimal.
4. Montrer que d et Δ sont parallèles.

On se place à présent dans la configuration conjecturée en A. 4.

5. Montrer que la droite (OD) est perpendiculaire à la droite d.
6. En déduire que r est minimal, et conclure.
7. Donner un protocole de construction du point D répondant à la question initiale.