

Loi de Benford

Niveau : terminale technologique ou générale (spécialité, Maths Complémentaires).

Lien avec le programme : Variable aléatoire discrète, logarithme népérien. Compétence « Modéliser », valider ou invalider un modèle.

Lien avec Les maths au quotidien : Société. Voir « Loi de Benford » dans l'ouvrage p. 243.

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2 021 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.

Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9, $P(X = c) = \frac{\ln(c+1) - \ln(c)}{\ln(10)}$.

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?
2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a. Premier cas

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées.

Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1^{er} janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b. Deuxième cas

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

