

# Éclairage maximal

**Niveau :** terminale générale, spécialité.

**Lien avec le programme :** complément sur la dérivation, calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ . Recours à un logiciel de calcul formel. Relation avec le programme de physique via le thème « Ondes lumineuses ».

**Lien avec Les maths au quotidien :** Bricolage.

## Partie A

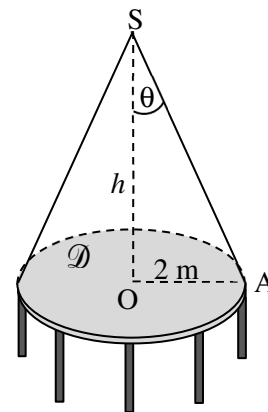
Une manufacture chinoise a installé dans son atelier une grande table circulaire de 4 m de diamètre, autour de laquelle les ouvriers vont travailler. Le chef d'atelier souhaite installer une lampe au-dessus du centre de la table et se demande à quelle hauteur la placer pour que l'éclairage du bord de la table soit maximal.

La face supérieure du plateau de la table est un disque  $\mathcal{D}$  de centre O et de rayon 2 m. Sur la perpendiculaire en O au plan du disque, l'entreprise veut placer une source lumineuse S.

Il s'agit donc, de déterminer la hauteur  $h$  à laquelle il faut placer S pour que l'éclairage en un point A du bord du disque soit maximal.

La loi qui régit l'éclairage est la suivante :

L'éclairage en A est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence  $\theta$  et inversement proportionnel au carré de la distance AS.



*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que l'éclairage au bord de la table est proportionnel à  $\frac{h}{(\sqrt{h^2 + 4})(h^2 + 4)}$ . C2

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 4})(x^2 + 4)}$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = (\sqrt{x^2 + 4})(x^2 + 4).$$

Voici une feuille de calcul élaborée avec un logiciel de calcul formel.

a. Calculer  $g'(x)$  et retrouver l'expression obtenue à l'issue de la deuxième instruction. C4

b. Retrouver alors l'expression de  $g'(x)$  obtenue à l'issue de la troisième instruction. C4

1	$g(x) := (\text{sqrt}(x^2 + 4)) * (x^2 + 4)$
	$x \rightarrow (\sqrt{x^2 + 4}) * (x^2 + 4)$
2	$g'(x)$
	$\frac{x * (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} + 2 * x * (\sqrt{x^2 + 4})$
3	<b>simplifier</b> ( $g'(x)$ )
	$3 * x * (\sqrt{x^2 + 4})$

2. Voici une deuxième feuille de calcul.

**Aide :**  $\text{diff}(g(x), x)$  désigne  $g'(x)$

a. Rappeler la formule permettant le calcul du résultat de la deuxième instruction. C1

b. En utilisant ce résultat (2<sup>e</sup> instruction), montrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4})(4 - 2x^2)}{(x^2 + 4)^3}$ . C4

1	$f(x) := x / g(x)$
	$x \rightarrow \frac{x}{g(x)}$
2	$f'(x)$
	$\frac{g(x) - x * \text{diff}(g(x), x)}{(g(x))^2}$

3. Étudier les variations de  $f$ . C5

4. Répondre à la problématique du chef d'atelier. C1 C5

Dans ce devoir apparaissent en particulier les capacités et compétences suivantes :

**CAPACITÉS ATTENDUES**

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	
--	--

**COMPETENCES ATTENDUES**

La compétence C6 est transversale à l'ensemble de la rédaction de votre copie.

<b>Chercher C1</b> : Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. S'engager dans une démarche.				
<b>Modéliser C2</b> : Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide de fonctions). Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.				
<b>Calculer C4</b> : Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.				
<b>Raisonner C5</b> : Effectuer une inférence pour prendre une décision.				
<b>Communiquer C6</b> : Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit. S'exprimer avec clarté et précision à l'écrit.				