

## Les boîtes d'allumettes de Banach

**Niveau** : terminale générale spécialité.

**Lien avec le programme** : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints. Nombre des parties d'un ensemble à  $n$  éléments. Combinaisons de  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments : parties à  $k$  éléments de l'ensemble. Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (probabilités). Variable aléatoire, espérance.

**Lien avec *Les maths au quotidien*** : Loisirs.

*Le problème qui suit est dû à H. Steinhaus (1887-1972), grand fumeur et mathématicien, qui le dédia à S. Banach (1892-1945), non moins grand mathématicien et fumeur invétéré.*

Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boîte d'allumettes qui contient initialement  $N$  allumettes. À chaque fois qu'il veut fumer une cigarette, il choisit au hasard une de ses deux poches et prend une allumette dans la boîte qui s'y trouve. Comme le fait de prendre une allumette est très machinal, il ne se rend compte qu'une boîte est vide qu'au moment où il veut prendre une allumette et qu'il ne peut pas, et non au moment de prendre la dernière allumette.



**A.** Soit  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Lorsque notre homme ne trouve plus d'allumette dans la boîte qu'il a choisie, on se demande quelle est la probabilité pour qu'il reste  $k$  allumettes dans l'autre boîte.

**1.** On suppose ici que c'est la boîte de la poche de droite qui est vide et qu'il reste  $k$  allumettes dans la boîte de la poche de gauche.

**a.** Combien y-a-t-il eu de tirages en tout (en comptant le dernier où il n'y a pas d'allumette) ? de tirages dans la boîte de droite ? de tirages dans la boîte de gauche ?

**b.** Combien d'allumettes a-t-on tirées en tout ? Cette combinaison d'allumettes comprend  $N$  allumettes tirées dans la poche de droite. Combien y-a-t-il de telles combinaisons possibles ?

**c.** Calculer, pour  $k \in \{0, \dots, N\}$ , la probabilité que, lorsque la boîte de droite est vide, la boîte de gauche contienne  $k$  allumettes.

**2.** Calculer, pour  $k \in \{0, \dots, N\}$ , la probabilité que, lorsqu'une des deux boîtes est vide, l'autre boîte contienne  $k$  allumettes.

**3. a.** Ici  $N = 50$ .

Calculer la probabilité que, lorsqu'une des deux boîtes est vide, l'autre boîte soit vide aussi.

**b.** Calculer la probabilité que, lorsqu'une des deux boîtes est vide, l'autre boîte contienne 50 allumettes.

**B.** Lorsque le fumeur ne trouve plus d'allumette dans une boîte, on se demande combien il reste d'allumettes, en moyenne, dans l'autre boîte.

**1.** Donner la formule qui permet de répondre à la question.

**2.** Calculs avec un outil numérique :  $N = 30$  puis  $N = 50$ .