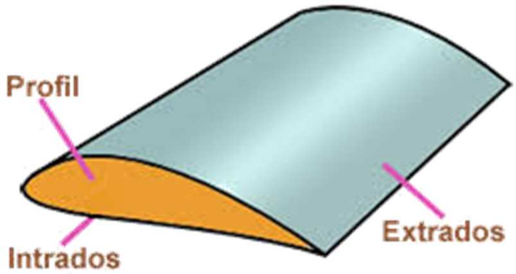
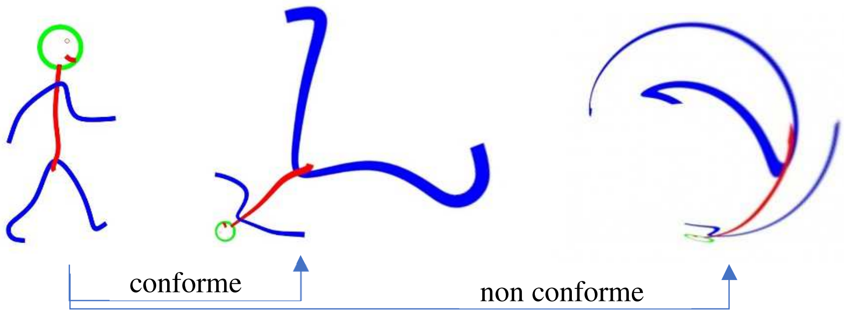
La transformation de Joukovski

Niveau : Terminale, Mathématiques Expertes.
Lien avec le programme : Forme exponentielle d'un nombre complexe. Formules d'Euler, Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.
Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
Lien avec Les maths au quotidien : Transport.



Dans l'aéronautique, afin notamment de concevoir les meilleurs profils d'aile d'avion, on étudie **l'écoulement de l'air** autour d'une surface (comme justement un profil d'aile) en termes de trajectoire et de de vitesse. On peut en déduire d'autres propriétés de l'écoulement, comme les coefficients de pression et de portance du profil, ou le coefficient de trainée.
Les lois de la mécanique des fluides montrent que si nous connaissons l'écoulement de l'air autour d'un certain profil simple, comme par exemple un cylindre (cercle vu de côté), et que nous connaissons une transformation **conforme** du plan qui transforme ce cercle en une autre figure plus complexe, on pourra déduire l'écoulement de l'air autour de ce nouveau profil.
Mais c'est quoi une transformation conforme ?
C'est une transformation du plan, conservant (localement) les angles entre deux courbes orientées, c'est-à-dire que si deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en A, et que leurs vecteurs tangents en A (dans le sens de l'orientation) forment un angle α, les vecteurs tangents en $f(A)$ aux deux courbes images $f(\mathscr{C}_1)$ et $f(\mathscr{C}_2)$ forment également l'angle α.



La **transformation de Joukovski**, nommée d'après le savant aérodynamicien russe Nikolaï Joukovski, est une transformation *conforme* du plan complexe dans lui-même, utilisée historiquement dans le calcul des profils d'aile d'avion.
Elle transforme un point M d'affixe z non nul en le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Notons $z' = \mathrm{J}(z)$.

Partie A : ensemble des points fixes par la transformation

Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que $\mathrm{J}(z) = z$.

Dans la suite on note A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.

Partie B – Images de $\mathbb{R}^*$, de $i\mathbb{R}^*$ par J

1. Calculer J(i), J(-3i), J(2i), J(1), J(-3), J(2).

2. a. Montrer que si $z = iy$ est imaginaire pur, $z' = \frac{i}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)$.

b. Avec un outil numérique, déterminer l'image par J de $\mathbb{R}^*$, de $i\mathbb{R}^*$ (ensemble des imaginaires purs non nuls).

Partie C – Images du cercle unité

1. Rappeler les valeurs de J(i), J($-i$), J(1), J(-1) et calculer $J\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $J\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Soit M d'affiche z sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Soit $\theta = \arg(z)$.

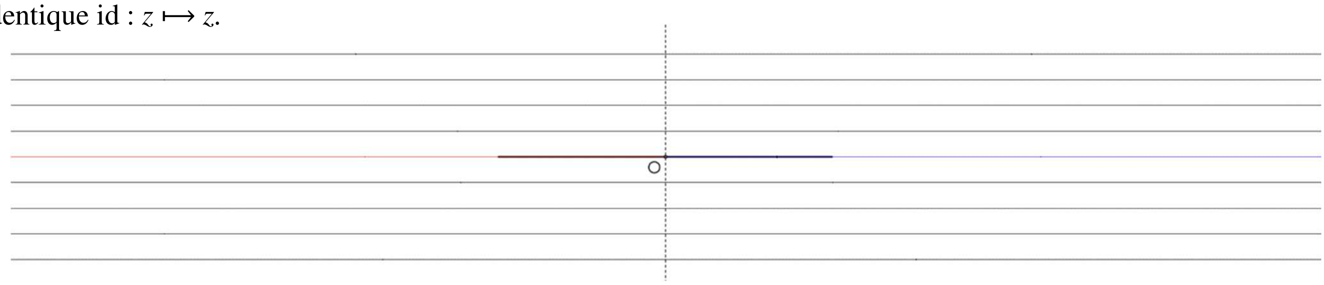
a. Ecrire z sous forme exponentielle.

b. Calculer J(z) et en déduire que l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation de Joukovski est le segment [AB].

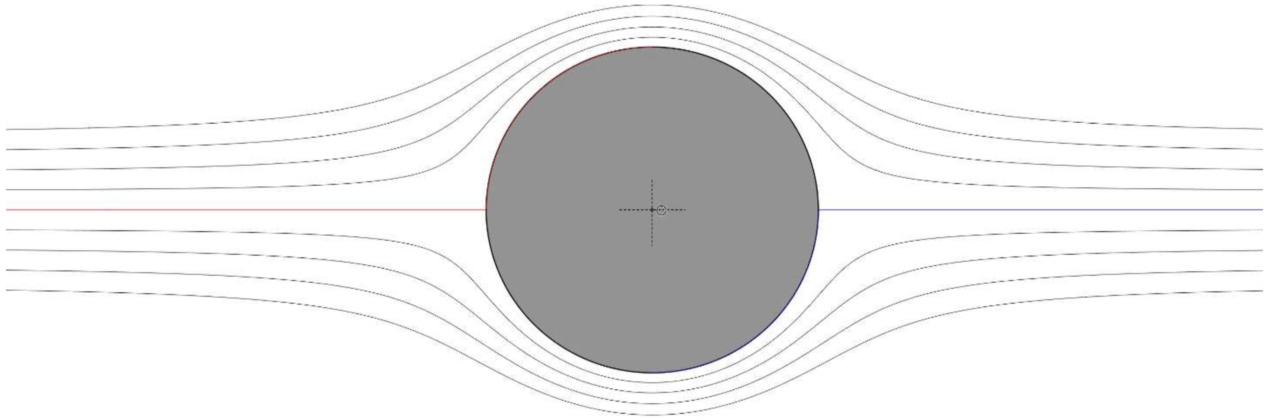
c. Montrer que tout élément de $[-1 ; 1]$ admet par J deux antécédents d'arguments opposés, appartenant à $\mathbb{U}$.

La transformation de Joukovski transforme donc chacun des deux demi-cercles, inférieur et supérieur composant le cercle unité, en le segment [AB].

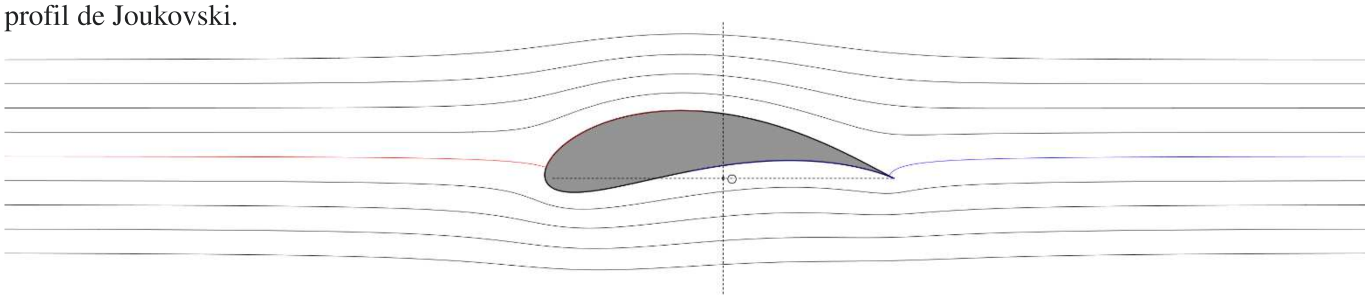
L'écoulement (horizontal) autour du segment (plaque rectangulaire d'épaisseur nulle en 3 dimensions) est le plus simple possible, puisque c'est comme si le segment n'était pas là : des droites horizontales représentent les lignes d'écoulement qui montrent la vitesse du vent. La transformation conforme qui produit cela est la transformation identique id : $z \longmapsto z$.



Pour calculer l'écoulement autour du cercle unité, il suffit d'appliquer à l'écoulement trivial autour du segment [AB] (au-dessus et en dessous) l'inverse de la transformation de Joukovski vers le demi-cercle supérieur ou inférieur…



Un *profil de Joukovski* est engendré par la transformation d'un cercle de centre différent de O qui passe par le point d'affixe 1. L'affixe du centre du cercle est le paramètre dont dépend la forme du profil. Ce dernier peut avoir une forme de lemniscate, ou de profil d'aile d'avion, selon le paramètre choisi.
Encore une fois, en appliquant la transformation de Joukovski au cercle unité, on obtient l'écoulement autour du profil de Joukovski.



Les aéronefs équipés de *profils de Joukovski* avaient besoin d'importantes motorisations ; ils ne furent plus guère utilisés après la Première Guerre mondiale.
Par ailleurs, cette méthode ne permet pas de calculer le coefficient de traînée (les hypothèses à la base du calcul, fluide parfait et écoulement bidimensionnel, conduisent à une traînée nulle).

Amusez-vous avec les trois fichiers GeoGebra joukovski1.ggb, joukovski2.ggb, joukovski3.ggb !