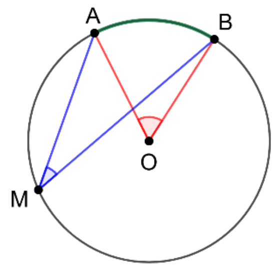
Angle au centre et angle inscrit

Niveau : cycle 4. Cinquième. Automatismes.

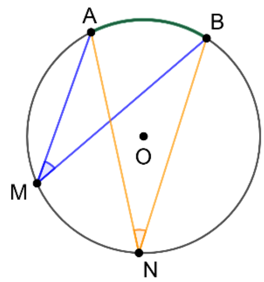
Lien avec le programme : angle plein, plat, nul, droit ; angles supplémentaires −Savoir qu'un angle plat mesure 180°. Reconnaitre un triangle isocèle à partir d'un schéma codé. Connaitre la somme des angles d'un triangle, calculer le 3e angle d'un triangle connaissant les mesures des deux autres.



<u>Théorème de l'angle au centre</u> : soit un cercle de centre O et A et B deux points distincts du cercle. Pour tout point M du cercle distinct de A et B, on a $\widehat{AOB} = 2\ \widehat{AMB}$.

« Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit Interceptant le même arc ».

<u>Conséquence</u> :



<u>Théorème de l'angle inscrit</u> : soit un cercle et A et B deux points distincts du cercle. Pour tous points M et N du cercle distincts de A et B, on a $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

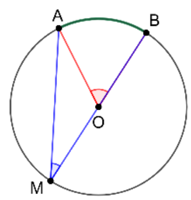
« Dans un cercle, tous les angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure. »

DEMONSTRATION du théorème de l'angle au centre

Considérons les trois cas suivants, selon la position du centre du cercle par rapport aux côtés de l'angle inscrit :

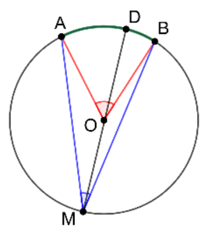
1er cas : M est diamétralement opposé à B sur le cercle.
2e cas : O est situé entre les deux côtés [AM] et [BM].
3e cas : O n'est pas situé entre les deux côtés [AM] et [BM].

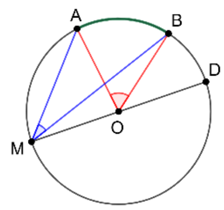
Dans chaque cas, notons D le point du cercle diamétralement opposé au point M.



<u>Cas n°1</u> :

1. Ecrire une égalité reliant les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{MOA}$.
2. Dans le triangle MOA, écrire une égalité reliant les angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{AMO}$.
3. En déduire que $\widehat{AOB} = 2\ \widehat{AMO}$ puis $\widehat{AOB} = 2\ \widehat{AMB}$.



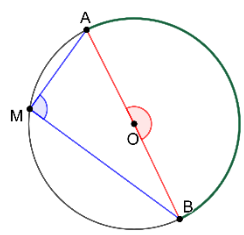


<u>Cas n°2</u> :

Appliquer le cas numéro 1 aux angles $\widehat{AMD}$ et $\widehat{DMB}$ et conclure.

<u>Cas n°3</u> :

Appliquer le cas numéro 1 aux angles $\widehat{AMD}$ et $\widehat{DMB}$ et conclure.



Cas particulier

Un cas particulier important est le cas où l'angle au centre est un angle plat :
On retrouve alors le ***<u>théorème du triangle inscrit dans un demi-cercle</u>*** :
Dans tout cercle, si un triangle a ses trois sommets sur le cercle et si un côté est un diamètre alors ce triangle est un triangle rectangle.

DEMONSTRATION du théorème de l'angle au centre

Appliquer le théorème de l'angle au centre à $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ et conclure.

On admet le théorème réciproque à celui de l'angle inscrit :

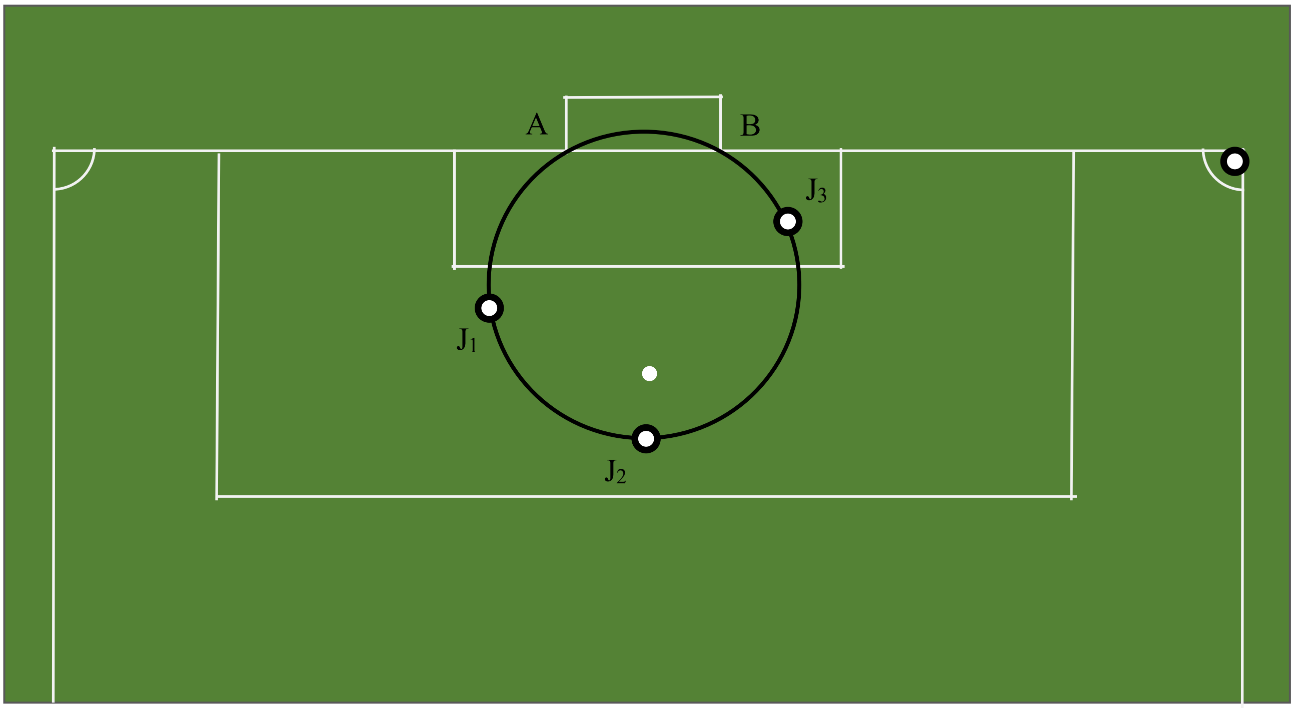
<u>Théorème de l'arc capable</u> : si on se donne deux points distincts A et B et un angle θ fixé, compris strictement entre 0 et 180° (ni 0°, ni 180°), alors l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \theta$ est un cercle passant par A et B et privé des points A et B.

Et plus précisément, ce cercle a pour centre le point O tel que OA = OB et $\widehat{AOB} = 2\theta$ d'après le théorème de l'angle au centre.

Exercice 1 :

Niveau : cycle 4. Cinquième. Théorème de l'angle inscrit démontré précédemment.
Lien avec *Les Maths au quotidien* : Sport

L'équipe de France est à l'entraînement à Clairefontaine. Dembélé tire un corner. Les attaquants sont positionnés sur un cercle passant par les points A et B qui représentent les pieds des deux poteaux de but, comme sur le dessin suivant. J_1 est Kylian Mbappé, J_2 est Marcus Thuram, J_3 est Michael Olise. Le gardien est sur le banc.
Médard et Prosper ont la joie d'assister à l'entraînement.



Médard s'exclame : « Ousmane aurait intérêt à jouer Olise, c'est lui le plus près des buts ».
Prosper rétorque : « Mais pas du tout, c'est Thuram le mieux placé, il est dans l'axe ».

1. Qui, de Médard ou Prosper, a raison ?
2. La séquence finie, c'et l'entrainement de tirs au but et Hugo Ekitiké s'avance au point de pénalty et Lucas Chevalier dans sa cage.
   Proper se demande alors à quel endroit de l'axe des buts Lucas verrait, au moment du tir, la cage deux fois plus grande, et à quel endroit de l'axe il la verrait deux fois plus petite.
   Répondre à ses questions en faisant les constructions sur le schéma.

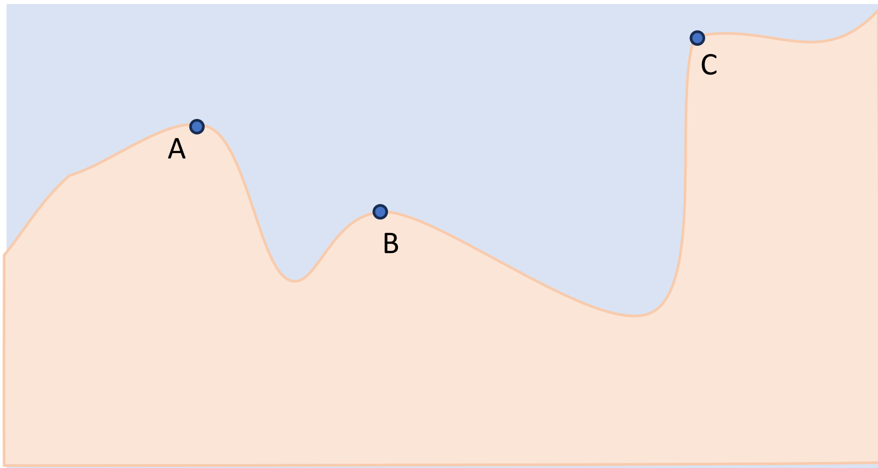
Exercice 2

Niveau : cycle 4. Cinquième. Théorèmes de l'angle inscrit, angle au centre, arc capable.

Lien avec *Les Maths au quotidien* : Navigation/Repérage.

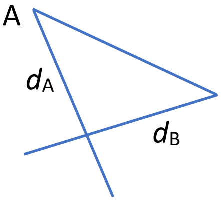
Un navire se trouve en mer, à proximité d'une côte, et son capitaine souhaite se localiser sur sa carte de manière précise. On note N le point représentant le navire.
À l'aide de son sextant, il mesure l'angle entre deux promontoires rocheux visibles devant lui, nommé A et B sur sa carte, puis entre deux autres, B et C ici.

Il trouve $\widehat{ANB} = 42°$ et $\widehat{BNC} = 72\ °$.



Sur la carte :

1. Construire le segment [AB] puis les demi-droites d_A d'origine A et d_B d'origine B, faisant chacune un angle de 42° et se dirigeant vers les Terres. Visuel :



2. Construire la droite perpendiculaire à d_A passant par A, et la droite perpendiculaire à d_B passant par B. Ces droites se coupe en O.
3. Justifier que $\widehat{AOB}\ = 84°$.
4. **a.** Justifier que N est sur le cercle de centre O passant par A et B.
   b. Construire ce cercle.
5. Construire, par la même procédure, un cercle passant par B et C sur lequel se trouve N.
6. En déduire la position de N sur la carte.

Point info :

Cette technique est l'une des méthodes utilisées autrefois par les marins en navigation côtière, pour déterminer la position du navire. Le sextant, lorsqu'il est utilisé dans le plan horizontal, permet de mesurer l'angle entre deux amers, c'est-à-dire deux points de repère identifiés, comme des phares, château d'eau, promontoires rocheux, etc.
Avant 1730, on se servait surtout de l'arbalestrille pour mesurer des angles.
À partir de 1731, il sera remplacé par l'octant puis par le sextant, inventé, indépendamment par John Hadley 1682-1744), un mathématicien et astronome britannique, et Thomas Godfrey (1704-1749), un inventeur américain.

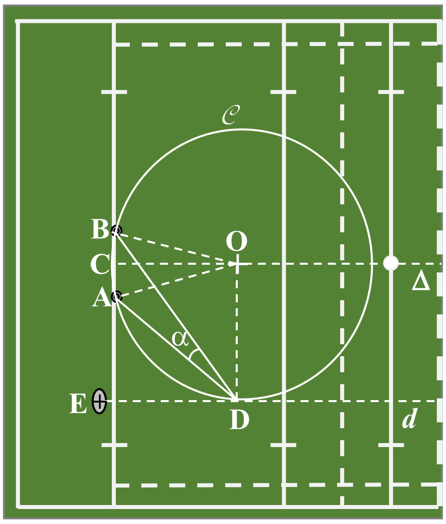
Exercice 3 :

Niveau : terminale générale, spécialité

Lien avec le programme : traiter de problèmes d'optimisation. Variation de la fonction sinus, composée de deux fonctions. Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M. Prérequis : théorème de l'angle au centre.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Sport

Ce soir, c'est France-Angleterre au stade de France et Antoine Dupont marque un essai au point E et rapporte ainsi 5 points supplémentaires à la France. La règle stipule qu'un joueur français doit tenter de transformer l'essai pour marquer 2 points supplémentaires. Pour cela, le ballon doit être posé sur la droite *d*, perpendiculaire à (AB) passant par E, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. Soit D le point de *d* où l'on va poser le ballon. On suppose que le buteur n'a pas de problème de puissance. En négligeant la hauteur prise par le ballon, la transformation a le plus de chances de réussir pour une valeur de l'angle $\widehat{ADB}$ maximale. Notons $\alpha = \widehat{ADB}$.



La question est alors : où doit-on placer le ballon ?
Eh bien la réponse est qu'il doit placer le ballon en D tel que le cercle *C* circonscrit à ABD soit tangent à la droite *d*.

On va justifier ce résultat. On place le ballon en D comme dit précédemment.
Soit O le centre du cercle *C*, circonscrit au triangle ABD.
On appelle C le milieu de [AB] et Δ la droite (CO). [AB] étant une corde du cercle *C*, Δ est perpendiculaire à (AB) et est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

1. Justifier que l'angle α mesure la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$.

2. a. Écrire CA en fonction de *r* et de α, où *r* est le rayon du cercle *C*.

b. *r* est une fonction de α. Ecrire son expression.

3. α appartient à un intervalle I inclus dans $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que $r(\alpha)$ est minimal si et seulement si α est maximal.

4. Montrer que *d* et Δ sont parallèles.

5. Montrer que la droite (OD) est perpendiculaire à la droite *d*.

6. En déduire que *r* est minimal.

Vidéo :

Niveau : Seconde

Lien avec le programme de physique : Vision et image/ partie « Optique ». Consolidation du modèle du rayon lumineux, notion de spectre, réflexion et mathématiques. Application : astrophysique.
Lien avec *Les maths au quotidien* : Représentations visuelles, Astronomie

Vidéo expliquant une application du théorème de l'angle inscrit en spectroscopie. Ce théorème est à la base de la notion de cercle de focalisation, ou cercle de Rowland. Ce physicien a, à la fin du XIXe siècle crée un dispositif permettant de focaliser les différentes longueurs d'onde de la lumière du Soleil, afin d'étudier sa composition.