# Refroidissement de l'eau

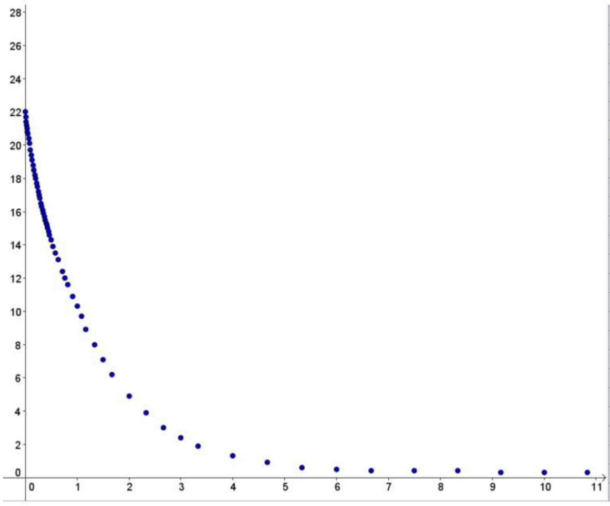
**Niveau** : Terminale générale, spécialité. 1h en salle informatique.
**Lien avec le programme** : Équation différentielle $y' = ay$. Allure des courbes.
**Lien avec Les maths au quotidien** : Cuisine, voir ouvrage p. 81.

## EXPERIENCE : REFROIDISSEMENT DE L'EAU

Un récipient contenant de l'eau et un thermomètre sont placés dans une enceinte dont on maintient la température constante égale à 0°C.

À l'instant $t = 0$ (exprimé en heure), la température de l'eau est de 22°C.
On relève les températures à différents instants et on les reporte dans le tableur de GeoGebra. On affiche ensuite le nuage de points associé.

Pendant le refroidissement, il semble exister une relation entre la température de l'eau et le temps passé dans l'enceinte maintenue à 0 °C.



| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Temps (h) | T (°C) | | Temps (min) |
| 2 | | | | |
| 3 | 0 | 22 | | 0 |
| 4 | 0.01 | 21.7 | | 0.5 |
| 5 | 0.02 | 21.4 | | 1 |
| 6 | 0.03 | 21.2 | | 1.5 |
| 7 | 0.03 | 21 | | 2 |
| 8 | 0.04 | 20.8 | | 2.5 |
| 9 | 0.05 | 20.7 | | 3 |
| 10 | 0.07 | 20.4 | | 4 |
| 11 | 0.08 | 20.1 | | 5 |
| 12 | 0.1 | 19.7 | | 6 |
| 13 | 0.12 | 19.4 | | 7 |
| 14 | 0.13 | 19.1 | | 8 |
| 15 | 0.15 | 18.8 | | 9 |
| 16 | 0.17 | 18.5 | | 10 |
| 17 | 0.18 | 18.2 | | 11 |
| 18 | 0.2 | 18 | | 12 |
| 19 | 0.22 | 17.7 | | 13 |
| 20 | 0.23 | 17.5 | | 14 |
| 21 | 0.25 | 17.2 | | 15 |
| 22 | 0.27 | 17 | | 16 |
| 23 | 0.28 | 16.8 | | 17 |
| 24 | 0.3 | 16.5 | | 18 |

## MODELISATION MATHEMATIQUE : LOI DE REFROIDISSEMENT DE NEWTON

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi :
« La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ».

On note $f(t)$ la température de l'eau en °C à l'instant $t$. On définit ainsi une fonction $f$ sur l'ensemble $[0\,;+\infty[$.

On suppose que cette fonction est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

Le nombre $f'(t)$ est la vitesse de refroidissement de l'eau à l'instant $t$.

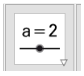
D'après la loi de refroidissement de Newton, il existe un réel $a$ **strictement positif** tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$ :
$f'(t) = -a\,f(t)$, c'est-à-dire : $f'(t) + a\,f(t) = 0$.

$-a$ est le coefficient de proportionnalité. Il est négatif car plus l'eau est chaude, plus elle **perd** de la chaleur.

**On note $(E_a)$ l' équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + ay = 0$, où la fonction $f$ est solution.**

**1.** Construction du fichier GeoGebra pouvant illustrer l'expérience initiale.

**a.** Définir deux curseurs, un curseur $a$ de valeur minimale 0, de valeur maximale 3 avec un incrément de 0,05 puis un curseur $c$ de valeur minimale $-4$, de valeur maximale 30 avec un incrément de 2.




**b.** Dans la ligne de Saisie en bas, utiliser la commande "RésolEquaDiff[$-a$*$y$, 0, $c$, 50, 0.1]" pour afficher la courbe représentative d'une fonction $f$ solution de l'équation $(E_a)$ : $y' + a\,y = 0$ telle que $f(0) = c$, sur l'intervalle $[0\,;50]$, et adapter la fenêtre graphique (voir la rubrique **« Utilisation de GeoGebra pour tracer la famille des courbes représentatives des solutions de l'EDL1 $(E_a)$ » en bas de seconde page).**

**c.** Faire varier la valeur de $a$.
Quelle est l'influence de $a$ sur la vitesse de refroidissement de l'eau ?

**d.** Modifier le curseur $c$ et activer la "trace" de la représentation graphique.
- Que représentent les courbes ainsi tracées ?
- Dans le contexte de ce TP, comment s'interprète le nombre $c$ ?

**2.** Déterminer à l'aide du logiciel Xcas l'ensemble de toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (se reporter en bas de page pour de l'aide, lire attentivement).

Xcas indique que l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(t) =$ ................, avec $c$ réel, sont les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ définies sur $[0\ ;+\infty[$.

**3.** Étude d'une fonction solution de l'équation différentielle ($E_a$).
On suppose pour la suite que $a$ et $c$ sont des réels strictement positifs.
On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(t) = ce^{-at}$.

**a.** Afficher en rouge la représentation graphique de la fonction $f$ sur le fichier GeoGebra et constater que celle-ci se superpose à celle déjà tracée.

**b.** La température de l'eau peut-elle être inférieure à 0°C ? Expliquer.

**c.** Conjecturer graphiquement la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ puis démontrer cette conjecture.
Interpréter ce résultat.

**1H**

**4.** La température initiale de l'eau était de 22°C. Une heure plus tard, la température de l'eau est de 10,3°C.

**a.** Placer le point A de coordonnées (1 ; 10,3) puis modifier les curseurs $c$ et $a$ pour que la solution affichée soit celle qui vérifie les conditions précédentes.
En déduire la valeur de $c$ et une valeur approchée de $a$, arrondie à $10^{-2}$ près.

**b.** Démontrer que $c = 22$ puis que $a = \ln\left(\frac{220}{103}\right)$.

**5.** Validation du modèle.
Ouvrir le fichier GeoGebra nommé « refroidissement » et afficher la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(t) = 22\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{220}{103}\right)\times t}$. Le modèle théorique est-il conforme à l'expérience ?

**6.** Déterminer, à l'aide du logiciel Xcas, la fonction $f$ solution de l'équation différentielle $y' + \ln\left(\frac{220}{103}\right) y = 0$, qui vérifie la condition initiale $f(0) = 22$.
Vérifier que le résultat affiché correspond à la fonction $f$ définie à la question précédente.

**Utilisation de GeoGebra pour tracer la famille des courbes représentatives des solutions de l'EDL1 ($E_a$)**

- La commande **"RésolEquaDiff[$-ay$, $t_{initial}$, $y_{initial}$, $t_{final}$, pas pour $t$]"**

permet de **représenter graphiquement la solution** de l'équation différentielle du premier ordre $y' = -ay$, compte tenu des conditions initiales. Sont placés des points sur cette courbe représentative, en partant de $t_{initial}$ jusqu'à $t_{final}$, avec un pas donné.

- Pour représenter une famille de courbes de solutions de l'équation différentielle $y' = -ay$, vous pouvez, par exemple, activer la trace du lieu représenté et faire varier $y_{initial}$ avec un curseur.

**Résoudre une équation différentielle $y' + ay = b$, à l'aide du logiciel Xcas**

| | |
|---|---|
| - La résolution exacte d'une équation différentielle s'effectue à l'aide de la commande "desolve".<br>- La fonction dérivée de la fonction inconnue $y$ s'écrit « y' ». Ainsi la commande "desolve(y'+a*y=0,t,y)" résout l'équation différentielle ($E_a$).<br>- Lorsque la fonction $y$ est une fonction de la variable $x$, on peut saisir plus simplement "desolve(y'+a*y=0,y)" ou même "desolve(y'+a*y=0)" pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($x$ est le nom de la variable par défaut).<br>- On peut ajouter une condition initiale (voir exemple). | Exemple : |

```
1 desolve(y'+2*y=0,t,y)
  c_0*exp(-2*t)
2 desolve(y'=-2*y,t,y)
  c_0*exp(-2*t)
3 desolve(y'+2*y=0)
  c_0*exp(-2*x)
4 desolve(y'+2*y=0,y(0)=3)
  3*exp(-2*x)
5 desolve([y'+2*y=0,y(0)=3],t,y)
  3*exp(-2*t)
```