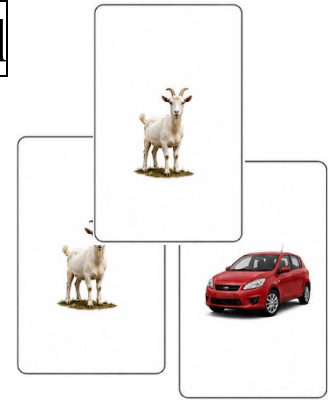


Le problème de Monty Hall

Niveau : premières.

Lien avec le programme : probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales.

Lien avec Les maths au quotidien : Insolite/Loisirs.



I. En classe : explication orale du jeu et distribution des cartes

II. Conjecture

On rappelle qu'une carte « chèvre » va être écartée à l'issue du premier choix et que l'on peut alors conserver son choix ou le changer.

Que feriez-vous de prime abord, changer ou garder votre carte ? Expliquer.

.....

.....

III. Expérimentation

Résultats des 10 parties en conservant son choix (gagné / perdu)									

Résultats des 10 parties en changeant d'avis (gagné / perdu)									

Mise en commun des groupes :

Sur parties où on conserve son choix, ont été gagnées.

Sur parties où on change de choix, ont été gagnées.

IV Changement de la conjecture ?

Que feriez-vous finalement, changer ou garder votre carte ?

.....

.....

V. Démonstration

On note G l'évènement « Le joueur gagne la voiture » et B celui « Le premier choix du joueur est la bonne carte (la voiture) ».

Alors $P(B) = \dots\dots\dots$ et $P(\bar{B}) = \dots\dots\dots$

Par la formule des probabilités totales : $P(G) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

A. Dans la stratégie où le joueur ne change pas de carte :

$P_B(G) = \dots\dots\dots$ et $P_{\bar{B}}(G) = \dots\dots\dots$ Ainsi, $P(G) = \dots\dots\dots$

B. Dans la stratégie où le joueur change de carte :

$P_B(G) = \dots\dots\dots$ et $P_{\bar{B}}(G) = \dots\dots\dots$ Ainsi, $P(G) = \dots\dots\dots$

VI. Epilogue : un raisonnement plus subtil

Si vous décidez de changer de carte, puisque le camarade retire du jeu une des cartes représentant une chèvre, la probabilité de trouver la voiture est égale à la probabilité d'avoir choisi une carte « chèvre » au départ. Celle-ci vaut $\frac{2}{3}$.

Si vous décidez de ne pas changer de carte, la probabilité de trouver la voiture est égale à la probabilité d'avoir choisi la carte « voiture » au départ. Celle-ci vaut $\frac{1}{3}$.

On a donc deux fois plus de chances de gagner en changeant de carte.

Pour ceux qui ne seraient pas convaincus, vous pouvez très bien énoncer les 3 cas équiprobables possibles de choix de la carte et voir que si on change de carte, 2 cas sur 3 amènent la voiture... ou bien faire 1 000 parties avec des 3 cartes (2 as et 1 roi par exemple) avec un(e) copain(e), et utiliser la loi des grands nombres.

Autre façon de voir pour les ultimes récalcitrants : le joueur a une chance sur trois de choisir au départ la carte « voiture », c'est ok ? S'il conserve son choix, il gagne la voiture exactement dans les cas où ce premier choix était le bon, donc avec probabilité $\frac{1}{3}$.

Imaginons un second joueur ayant choisi la même carte mais qui, lui, change de carte. Quand le premier joueur tombe sur une chèvre, le second a la voiture, et inversement.

Le second joueur gagne donc avec probabilité $\frac{2}{3}$...

Point info : Ce jeu s'inspire d'un jeu proposé dans l'émission télévisée américaine Let's Make a Deal, diffusée aux États-Unis à partir de 1963 et présentée pendant plus d'une décennie par Monty Hall. Ce « problème de Monty Hall » a suscité de très nombreuses controverses, y compris parmi des mathématiciens reconnus, après que la chroniqueuse Marilyn vos Savant en a publié la solution correcte dans un magazine américain en 1990, provoquant un déferlement de lettres outrées, dont certaines signées par des titulaires de doctorat en mathématiques, la traitant d'incompétente...

Un autre problème cousin, tout aussi retors pour l'intuition, est le « paradoxe des boîtes de Bertrand », dû à Joseph Bertrand (1822–1900), mathématicien, économiste et historien des sciences français.

VII. Algorithme

En remplacement de la première partie « Manipulation » ou bien en complément de cette activité, on peut simuler le jeu de Monty Hall à l'aide d'un algorithme comme celui-ci :

Attention, les listes doivent avoir été travaillées auparavant.

```
import random

garder = 0
changer = 0
n = 1000

for i in range(1, n + 1):
    portes = [1, 2, 3]

    voiture = random.randint(1, 3)  # porte cachant la voiture, tirée au hasard
    choix = random.randint(1, 3)    # choix initial du joueur, tiré au hasard

    # L'animateur ne peut ouvrir ni la porte choisie par le joueur,
    # ni celle qui cache la voiture : il choisit parmi les portes restantes.
    portes_ouvrables = [p for p in portes if p != choix and p != voiture]
    porte_ouverte = random.choice(portes_ouvrables)

    # La porte "restante" est celle que le joueur obtient s'il change d'avis :
    # ni celle qu'il avait choisie, ni celle que l'animateur vient d'ouvrir.
    porte_restante = [p for p in portes if p != choix and p != porte_ouverte][0]

    # Stratégie "garder" : le joueur reste sur son choix initial
    if choix == voiture:
        garder += 1

    # Stratégie "changer" : le joueur prend la porte restante
    if porte_restante == voiture:
        changer += 1

garder = garder / n
changer = changer / n

print("Proportion de victoires en gardant :", garder)
print("Proportion de victoires en changeant :", changer)
```