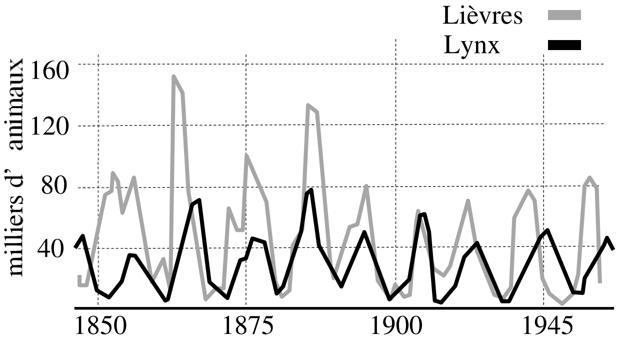
Un modèle proie-prédateur

Niveau : terminale générale, Maths Expertes, TP avec un tableur.

Lien avec le programme : modèle proie-prédateur discrétisé ; évolution couplée de deux suites récurrentes ; étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre ; calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 ; écriture matricielle d'un système linéaire ; suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n$.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Dynamique de population (voir p. 98 de la 2de édition du livre).

Voici des données récoltées depuis le milieu du XIXe siècle par la compagnie de la Baie d'Hudson, une société canadienne collectant les fourrures des animaux chassés par les trappeurs. On représente le nombre de fourrures de lièvres variables et de lynx du Canada récoltés durant cette période. Si on suppose que le nombre d'animaux attrapés est proportionnel à l'effectif total de la population, alors ce graphe rend compte des variations des effectifs des populations de lynx et de lièvres.



Les scientifiques se sont interrogés sur la forme de ces résultats. D'où viennent les oscillations observées ? Comment expliquer que ces oscillations soient légèrement décalées ?

Rapidement, ils ont constaté que le lièvre variable était la proie principale du lynx… (suspense insoutenable)

Construction d'un modèle Proie-prédateur

Un modèle proie-prédateur, est un modèle où l'on considère deux espèces dont l'une est croquée par l'autre, par exemple des lynx et des lièvres, des requins et des sardines, des chouettes et des campagnols…

Il s'agit de pouvoir prédire l'évolution des effectifs de proies et de prédateurs au cours du temps.

Construisons un modèle proie-prédateur des plus simples. Dans ce modèle, les proies n'ont qu'un prédateur et on considère qu'il n'y a pas de problème de nourriture pour les proies. On suppose que seule l'interaction prédateur-proie a une influence sur l'évolution des effectifs. En particulier, on considère comme négligeables les variations du climat, ou encore les effets des maladies ou du parasitisme.

Pour une année n ($n = 0$ pour l'année initiale), on appelle x_n l'effectif de proies (lièvres) et y_n l'effectif de prédateurs (les lynx).

I. Évolution de l'effectif de la population de lièvres.

A. Supposons un instant qu'il n'y ait pas de prédateur, et que nos amis les rongeurs gambadent gentiment à travers la campagne en toute quiétude, en s'en mettant plein la panse de carottes et de céleris. L'évolution de l'effectif de la population de proies d'une année sur l'autre serait alors uniquement calculée à partir de leur taux d'accroissement naturel T_1, différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité (mort naturelle). Une étude de terrain montre que $T_1 = 5$ % (les lièvres se reproduisent comme des lapins…)

1. Écrire x_{n+1} en fonction de x_n.

2. Que se passerait-il en l'absence de prédateur ?

B. Maintenant, on tient compte de la présence des vilains lynx. L'interaction entre les proies et les prédateurs conduit à une diminution de l'effectif de la population des lièvres d'une année sur l'autre. On suppose que cette diminution est proportionnelle au nombre de rencontres entre les proies et les prédateurs et est donc proportionnelle au produit du nombre de prédateurs par le nombre de proies. Cette diminution pour l'année $n + 1$ vaut donc $-A\, x_n\, y_n$ où le paramètre positif A mesure en quelque sorte l'efficacité avec laquelle les prédateurs chassent les proies. L'étude de terrain montre que $A = 0{,}001$.

Écrire x_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

II. Évolution de l'effectif de lynx

Contrairement aux proies, on suppose que les prédateurs ne peuvent survivre sans les proies, et que sans lièvre à se mettre sous la dent, le taux d'accroissement naturel est négatif. L'étude de terrain montre que ce taux d'accroissement T_2 est égal à –3 %.
Les prédateurs survivent uniquement grâce à leur interaction avec les proies. L'interaction entre les proies et les prédateurs conduit, contrairement à précédemment, à une augmentation de la population des prédateurs. Cette augmentation est proportionnelle au nombre de rencontres entre les proies et les prédateurs et donc proportionnelle au produit du nombre de prédateurs par le nombre de proies. Cette augmentation vaut donc B x_n y_n où le paramètre positif B mesure l'efficacité avec laquelle la consommation de proie permet d'augmenter la population des prédateurs. L'étude de terrain montre que B = 0,0002.

1. Écrire y_{n+1} en fonction de y_n.
2. Que se passerait-il en l'absence de proie ?

II. Étude des effectifs des populations.

On considère pour n entier naturel le système : $\begin{cases} x_{n+1} = 1{,}05x_n - 0{,}001x_n y_n \\ y_{n+1} = 0{,}97y_n + 0{,}0002x_n y_n \end{cases}$

1. On suppose qu'aucune des deux espèces ne s'éteint. Montrer qu'il existe des effectifs initiaux x_0 et y_0 (non nuls donc…) pour lesquels les effectifs de lynx et de lièvres resteraient constants.

On appelle **point d'équilibre** le point de coordonnées x_0 et y_0 trouvés.

2. Utilisation du tableur

On suppose au départ qu'il y a 200 lièvres et 50 lynx dans la baie d'Hudson. On va étudier avec un tableur l'évolution du nombre de lynx et de lièvres sur 500 ans.

a. Ouvrir une feuille de calcul sur un tableur et saisir les effectifs initiaux dans les cellules A2 et B2, les valeurs de n dans la colonne C et calculer les effectifs de lièvres et de lynx dans les colonnes E et F.

	A	B	C	D	E
1	x0	y0	n	xn	yn
2	200	50	0	200	50
3			1	200	50,5

b. Représenter l'évolution du nombre de lièvres et de lynx en fonction **du temps**. Observations ?

c. Représenter l'évolution du nombre de lynx en fonction **du nombre de lièvres** et placer le point d'équilibre. Observations ?

d. Faire varier les effectifs initiaux et commenter les différences.

3. Linéarisation au voisinage du point d'équilibre.

On définit ici deux nouvelles suites X_n et Y_n par $X_n = x_n - 150$ et $Y_n = y_n - 50$.
x_n et y_n étant « au voisinage » de 150 et 50, X_n et Y_n sont tous deux au voisinage de 0, donc « petits».

a. Exprimer X_{n+1} et Y_{n+1} en fonction de X_n et Y_n.

b. Les termes contenant le produit $X_n Y_n$ sont très petits devant les termes en X_n et Y_n. On les néglige dans la suite des calculs.

Posons $U_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = A\,U_n$ avec A une matrice à déterminer.

Exprimer alors U_n en fonction de A et de n.

c. En déduire une méthode de calculs des effectifs des populations de lynx et de lièvres.