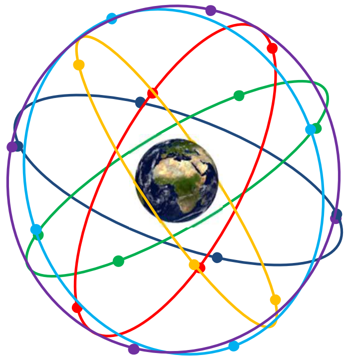
LE GPS

Niveau : terminale générale, Spécialité.

Lien avec le programme : repérage dans l'espace. Représentation paramétrique d'une droite. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan. Étude de la position relative de deux plans.
Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour limiter le temps consacré à des calculs techniques et se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

Lien avec Les maths au quotidien : Astronomie, Navigation, Date et heure.



Le GPS comprend une constellation d'au moins 24 satellites NAVSTAR orbitant à une moyenne de 20 200 km d'altitude. Ces satellites évoluent sur 6 plans orbitaux décalés de 60° entre eux, ayant une inclinaison d'environ 55° par rapport au plan de l'équateur. Ils suivent une orbite quasi-circulaire qu'ils parcourent en 11 h 58 min 2 s, soit un demi-jour sidéral. Ainsi, les satellites, vus du sol, reprennent la même position dans le ciel au bout d'un jour sidéral.

La surface terrestre n'est pas tout-à-fait une sphère, mais un géoïde approximé par un ellipsoïde (sorte de sphère aplati aux pôles, comme un ballon de rugby). Le rayon polaire est de 6356,8 km tandis que celui à l'équateur est en moyenne de 6378,14 km.
Le GPS utilise le système géodésique WGS84 (ellipsoïde de référence WGS84) auquel se réfèrent les coordonnées calculées grâce au système.

Des chercheurs de la "***US Geological Survey***" ont placé des colliers dotés de balises GPS sur le cou de femelles ours polaires (le cou des mâles étant trop épais pour attacher les appareils) afin de suivre les migrations de ces animaux.

Trois satellites NAVSTAR ont repéré une ourse sur la banquise.
Dans le tableau ci-après sont données les informations transmises par les trois satellites.

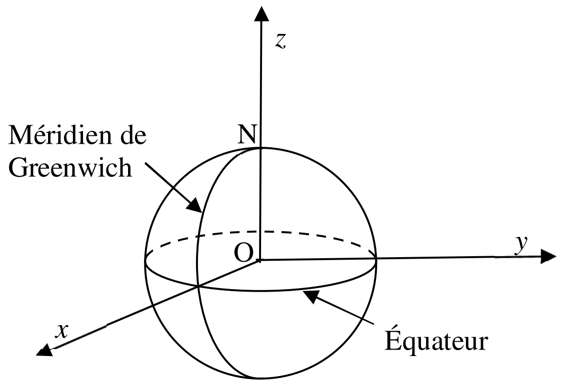
On se place dans un repère orthonormé direct de l'espace, d'unité de longueur le rayon polaire, soit 6 356,8 kilomètres. Les axes passent par le centre de la Terre, l'axe (Ox) passe par l'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich, l'axe (Oz) passe par le pôle Nord.

Afin de ne pas nuire à l'explication du principe de géolocalisation par GPS en faisant des calculs très laborieux, on a largement simplifié les données. Les ordres de grandeur sont néanmoins relativement fidèles à la réalité.

Voici les données.

	abscisse	ordonnée	côte	Distance à la balise
satellite 1	-3	0	3	$\sqrt{13}$
satellite	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1. Placer sur le dessin ci-dessous la position des trois satellites en laissant les traits de construction.



2. Si on prend pour rayon de la Terre celui aux pôles, calculer l'altitude du satellite 2.

3. a. Soit (x ; y ; z) les coordonnées cartésiennes de la balise GPS. En exploitant la distance des satellites à la balise GPS, écrire un système (S) d'inconnue (x ; y ; z).

b. Développer et réduire les membres des trois égalités obtenues.

c. Montrer que le système (S) est équivalent à (S') :

$$\begin{cases} -6x-6y+2z=2 & \qquad L_1 \\ 4x-2y+2z=2 & \qquad L_2 \\ x^2+y^2+z^2+2x+2y-8z=-7 & \qquad L_3 \end{cases}$$

4. a. Donner la nature ainsi que des éléments caractéristiques des ensembles de points P et Q d'équations cartésiennes $-6x - 6y + 2z = 2$ et $4x - 2y + 2z = 2$.

b. Montrer que P et Q sont sécants.

c. Retrouver la représentation paramétrique de $P \cap Q$ fournie par Xcas :

```
1 resoudre([4*x-2*y+2*z-2=0,-6*x-6*y+2*z-2=0,z=k],[x,y,z])
```

$$\left[-\frac{2*k}{9}+\frac{2}{9},\ \frac{5*k}{9}-\frac{5}{9},\ k\right]$$

5. Dans la feuille de calcul suivante, on a remplacé, dans la ligne L_3 du système (S'), x et y en fonction de k :

```
2 simplifier((-2*k/9+2/9)^2+(5*k/9-5/9)^2+k^2+4*(-2*k/9+2/9)+4*(5*k/9-5/9)-4*k+3=0)
```

$$\frac{110*k^2-274*k+164}{81}=0$$

6. a. Résoudre l'équation d'inconnue k obtenue.

b. Déterminer la position de l'ourse (justifier pourquoi on écarte une solution).

En fait, la distance de chaque satellite à la balise n'est connue que par la connaissance du temps mis par le signal pour effectuer le trajet satellite-récepteur (en ligne droite à la vitesse de la lumière). Or, contrairement aux satellites, les récepteurs GPS ne possèdent pas d'horloge atomique (trop chère et trop volumineuse). Le temps t au moment où le récepteur GPS reçoit les signaux des satellites est inconnu.
Cela fait une inconnue de plus par rapport aux trois inconnues spatiales x, y et z et il nous faut une équation de plus ! Un quatrième satellite est alors nécessaire pour déterminer les coordonnées du récepteur, mais aussi le temps exact au moment de la réception. Le GPS ne se contente pas de donner les coordonnées de l'utilisateur, il lui donne aussi l'heure !!! ☺ Voyons comment. 😐

Prenons un exemple plus précis que le précédent car on va demander à Xcas de résoudre le système pour nous.
On se place dans le repère ayant les mêmes axes que précédemment mais dont l'unité est le kilomètre.
Le temps est exprimé en millisecondes. Le temps est compté à partir de 12h 07 min 42 s.

Voici les données de 4 satellites :

	abscisse	ordonnée	côte	temps au moment de l'envoi du signal
satellite 1	6 616	15 931	20 337	169.067
satellite 2	10 900	–22 347	9 050	177.423
satellite 3	–2847	–17 974	19 515	174.084
satellite 4	25 666	5 926	–2 305	169.187

On rappelle que la lumière parcourt 299 792 km en une seconde.

7. On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du récepteur GPS et t le temps, en ms, à la réception simultanée des quatre signaux des satellites (temps compté à partir de 12h 07 min 42 s).

a. Écrire pour les quatre satellites la distance d, en km, en fonction du temps t.

b. Écrire quatre équations d'inconnues $(x\ ;\ y\ ;\ z\ ;\ t)$.

8. Voici une feuille de calcul Xcas.

```
3 evalf(resoudre([(x-6616)^2+(y-15931)^2+(z-20337)^2=299.792^2*(t-169.067)^2,
                  (x-10900)^2+(y+22347)^2+(z-9050)^2=299.792^2*(t-177.423)^2,
                  (x+2847)^2+(y+17974)^2+(z-19515)^2=299.792^2*(t-174.084)^2,
                  (x-25666)^2+(y-5926)^2+(z+2305)^2=299.792^2*(t-169.187)^2], [x,y,z,t]))

[ -8081.84419098,  3997.45198541,  -8246.87379138,  54.7037521924 ]
[ 3897.8744344,   -2252.54573964,  4501.05083689,   250.007592541 ]
                                                                    M
```

Déterminer les coordonnées cartésiennes du récepteur (à la dizaine près) ainsi que l'heure à la réception (au millième de seconde près).

9. En fait, le GPS travaille effectivement avec les coordonnées cartésiennes, mais donne plutôt en résultat les coordonnées géographiques du récepteur : longitude θ, latitude φ, et altitude A.

A est donnée par $A = r -$ rayon terrestre où r est la distance du récepteur au centre de la Terre.

Les formules sont :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{Arcsin}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\theta \text{ s'obtient avec } \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r\cos(\varphi)} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r\cos(\varphi)} \end{cases}$$

Déterminer au degré près la longitude et la latitude du récepteur.