LE GPS

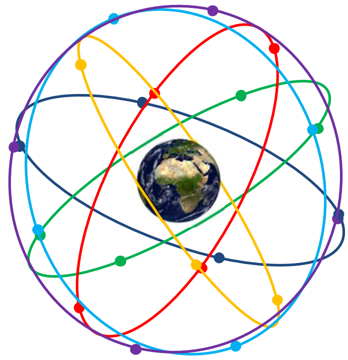
Niveau : terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme : écriture matricielle d'un système linéaire, matrice carrée, matrice inverse d'une telle.

Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour limiter le temps consacré à des calculs techniques et se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

Lien avec Les maths au quotidien : Astronomie, Navigation, Date et heure.

Le GPS comprend une constellation d'au moins 24 satellites NAVSTAR orbitant à une moyenne de 20 200 km d'altitude. Ces satellites évoluent sur 6 plans orbitaux décalés de 60° entre eux, ayant une inclinaison d'environ 55° par rapport au plan de l'équateur. Ils suivent une orbite quasi-circulaire qu'ils parcourent en 11 h 58 min 2 s, soit un demi-jour sidéral. Ainsi, les satellites, vus du sol, reprennent la même position dans le ciel au bout d'un jour sidéral.

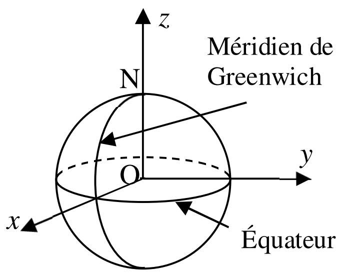


La surface terrestre n'est pas tout-à-fait une sphère, mais un géoïde approximé par un ellipsoïde (sorte de sphère aplati aux pôles, comme un ballon de rugby). Le rayon polaire est de 6356,8 km tandis que celui à l'équateur est en moyenne de 6378,14 km.
Le GPS utilise le système géodésique WGS84 (ellipsoïde de référence WGS84) auquel se réfèrent les coordonnées calculées grâce au système.

Des chercheurs de la "***US Geological Survey***" ont placé des colliers dotés de balises GPS sur le cou de femelles ours polaires (le cou des mâles étant trop épais pour attacher les appareils) afin de suivre les migrations de ces animaux.

Quatre satellites NAVSTAR ont repéré une ourse sur la banquise.
Dans le tableau ci-après sont données les informations transmises par les quatre satellites.

On se place dans un repère orthonormé direct de l'espace, d'unité de longueur le rayon polaire, soit **6 356,8 kilomètres**. Les axes passent par le centre de la Terre, l'axe (Ox) passe par l'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich, l'axe(Oz) passe par le pôle Nord.



Le temps sera exprimé en unité par milliseconde (rayon polaire par milliseconde). Chaque satellite possède une horloge atomique ultra précise, et envoie dans son signal sa position et l' « heure » au moment où il envoie le signal. Ce temps sera compté en ms, **compté après 12 h 07 min 42 s**.

On suppose que le signal voyage en ligne droite à la vitesse de la lumière.

Afin de ne pas nuire à l'explication du principe de géolocalisation par GPS en faisant des calculs très laborieux, on a largement simplifié les données. Les ordres de grandeur sont néanmoins relativement fidèles à la réalité. On considère en particulier ici que **la lumière a une vitesse de 0,05 unité par milliseconde** (0,04716 en réalité…).

Voici les données.

	abscisse	ordonnée	côte	temps au moment de l'envoi du signal (ms)
satellite 1	-3	0	3	178
satellite 2	2	2	3	181
satellite 3	-1	-1	4	184
satellite 4	0	1	4	187

1. Si on prend pour rayon de la Terre celui aux pôles, calculer l'altitude du satellite 2.

2. On note t l'instant de réception (simultanée) des quatre signaux par le récepteur, exprimé en ms, et compté après 12 h 07 min 42 s.
   Pour chacun des quatre satellites, exprimer sa distance d au récepteur en fonction de t.

3. **a.** Soit $(x\,;\,y\,;\,z)$ les coordonnées cartésiennes de la balise GPS. En exploitant la distance des satellites à la balise GPS, écrire un système (S) d'inconnue $(x\,;\,y\,;\,z,\,t)$.

   b. Voici une feuille de calcul formel.

```
1 developper((x+3)^2+y^2+(z-3)^2-0.05^2*(t-178)^2,
             (x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-0.05^2*(t-181)^2,
             (x+1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2-0.05^2*(t-184)^2,
              x^2+(y-1)^2+(z-4)^2-0.05^2*(t-187)^2)
```

$$(-0.0025)*t^2+x^2+y^2+z^2+0.89*t+6*x-6*z-61.21,$$
$$(-0.0025)*t^2+x^2+y^2+z^2+0.905*t-4*x-4*y-6*z-64.9025,$$
$$(-0.0025)*t^2+x^2+y^2+z^2+0.92*t+2*x+2*y-8*z-66.64$$
$$(-0.0025)*t^2+x^2+y^2+z^2+0.935*t-2*y-8*z-70.4225$$

   Montrer que le système (S) est équivalent à (S') :

$$\begin{cases} -0{,}045t+6x+2y+2z+9{,}2125=0 & L_1 \\ -0{,}03t-4x-2y+2z+5{,}52=0 & L_2 \\ -0{,}015t+2x+4y+3{,}7825=0 & L_3 \\ -0{,}0025t^2+x^2+y^2+z^2+0{,}935t-2y-8z-70{,}4225=0 & L_4 \end{cases}$$

4. On considère le système linéaire (S''): $\begin{cases} -0{,}045t+6x+2y+2z+9{,}2125=0 \\ -0{,}03t-4x-2y+2z+5{,}52=0 \\ -0{,}015t+2x+4y+3{,}7825=0 \end{cases}$.

   On pose $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0{,}045t-9{,}2125 \\ 0{,}03t-5{,}52 \\ 0{,}015t-3{,}7825 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que le système (S'') peut se traduire par la relation matricielle : $AX=B$ où A est une matrice carrée à préciser.

   b. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

   c. Déterminer alors x, y et z en fonction de t.

5. Pour s'éviter un calcul laborieux, on a demandé à Xcas de remplacer x, y et z par leurs expressions en fonction de t, dans la ligne L_4 du système (S').

```
2 developper(-0.0025*t^2+0.01125^2+(0.00375*t-0.95125)^2+(0.01875*t-3.68875)^2
            +0.935*t-2*(0.00375*t-0.95125)-8*(0.01875*t-3.68875)-70.4225=0)
```

$$(-0.002134375*t^2+0.6320375*t-24.4981203125)=0$$

   a. Résoudre l'équation d'inconnue t obtenue.

   b. Déterminer l' « heure » au millionième de seconde près sur Terre au moment de la géolocalisation, puis la position de l'ourse (coordonnées arrondies au millième).

6. Près de quel point géographique majeur se trouve l'ourse ?