Ensembles de Julia

Niveau : Terminale, Mathématiques Expertes.

Lien avec le programme : Nombres complexes : point de vue géométrique.
Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia.

Lien avec Les maths au quotidien : Thème « Fractales ».

Une fractale est un objet mathématique dont la structure est invariante par changement d'échelle (autosimilarité).

Dans ce TP, vous allez étudier quelques exemples d'**ensembles de Julia**, du nom du mathématicien français Gaston Julia (1893-1978), spécialiste des fonctions d'une **variable complexe**.

Soit ω et c deux nombres complexes. On considère une suite de nombres complexes (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$z_0 = \omega$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = |z_n|$.

Dans un repère du plan complexe, notons M_n l'image de z_n.

L'**ensemble de Julia rempli**, noté J_c, est l'ensemble des nombres complexes ω tels que la suite (u_n) est bornée, c'est-à-dire que tous les points M_n d'affixe z_n restent dans un certain disque centré sur l'origine du repère.

A. Étude avec un tableur

On choisit dans cette partie $c = -1$.
On souhaite déterminer si un nombre complexe z_0 appartient à l'ensemble de Julia rempli associé à $c = -1$.

1. Pour tout entier naturel n, on note $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ avec x_n et y_n réels.
Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. $\rightarrow$ Ouvrir une feuille de calcul sur tableur et la remplir comme ci-dessous (n allant de 0 à 100).

	A	B	C	D
1	n	x_n	y_n	u_n
2	0			
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			

a. Quelles formules faut-il rentrer dans les cellules B3 et C3, à étendre vers le bas ?

b. Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule D2, à étendre vers le bas ?

c. Déterminer deux valeurs de z_0 pour lesquelles la suite (u_n) est bornée et deux valeurs de z_0 pour lesquelles la suite (u_n) ne semble pas bornée.

B. Représentation graphique d'un ensemble de Julia avec Python

→ Ouvrir le fichier Julia.py

La fonction « Julia » a comme paramètre N le nombre de valeurs de z_0 que l'on veut tester.

On admet que s'il existe un entier n tel que $u_n > 2$, alors (u_n) n'est pas bornée.
→ Pour les champions, chercher une démonstration sur internet (raisonnement par récurrence).

Afin de tester si $u_n > 2$, on se limitera ici aux valeurs de n inférieures ou égales à 100 :
On considérera que si $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \leqslant 100$, alors z_0 appartient à l'ensemble de Julia.

```
from random import *
from math import *
from pylab import *
def Julia(N):
    LX =[]
    LY =[]
    for i in range(N):
        z0 = random()*4-2+1j*(random()*4-2)
        z=z0
        k=0
        while (.......... and k<100):
            k = k+1
            z = z**2 -0.7927+0.1609j
        if k == 100:
            LX.append(z0.real)
            .................
    scatter(LX,LY,s=1)
    show()
```

1. random() renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Que renvoie random()*4 – 2 ?

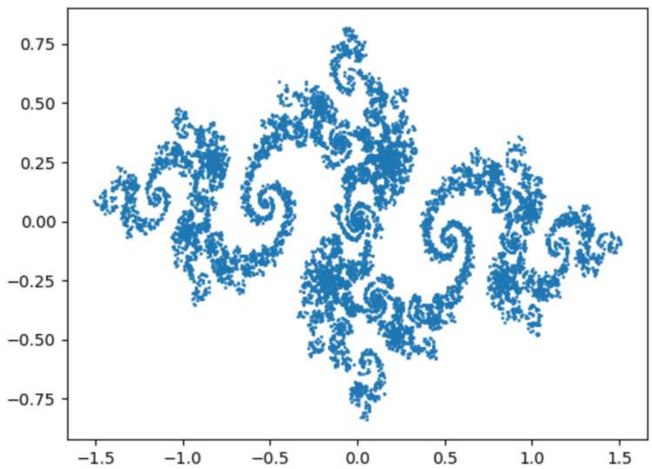
2. a. Dans le programme, remplacer les pointillés de l'instruction « while » par un script adéquat.
Faire de même avec l'antépénultième ligne du programme.

b. Tester ce programme pour N = 10 000 puis pour N = 1 000 000.
L'ensemble de Julia représenté s'appelle « la basilique ».
Zoomer une ou deux fois sur une partie du graphique pour visualiser la propriété d'autosimilarité.

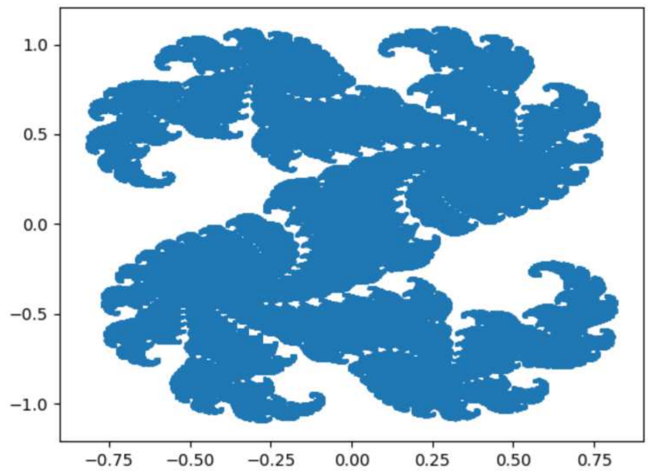
c. Modifier ce programme pour représenter l'ensemble de Julia lorsque :
$c = 0{,}25$ (chou-fleur) ; $c = -1{,}7548$ (avion) ; $c = -0{,}123 + 0{,}745\text{i}$ (lapin de Douady)

d. Représenter l'ensemble de Julia pour une valeur de c de votre choix.

Autres exemples :



$c = -0{,}7927 + 0{,}1609\text{i}$



$c = 0{,}32 + 0{,}043\text{i}$

Point info :

Pour les ensembles de Julia, le nombre complexe c est fixé et on s'intéresse aux différentes valeurs de z_0 tels que (u_n) est bornée.
Si maintenant on **fixe** z_0 à 0 et que c lui n'est plus fixé, et que l'on s'intéresse à l'ensemble des nombres complexes c tels que (u_n) soit bornée, on définit ce qu'on appelle **l'ensemble de Mandelbrot**, du nom du mathématicien polonais-franco-américain Benoît Mandelbrot (1924 - 2010), qui a été notamment élève de Gaston Julia, et père de la géométrie fractale.
L'ensemble de Mandelbrot est une fractale. Voici sa représentation graphique.