

# Courbes de Bézier

**Niveau** : terminale générale spécialité, approfondissement (niveau difficile)

**Lien avec le programme** : Vecteurs, approfondissement. Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.

**Lien avec Les maths au quotidien** : Transport, Représentations visuelles

Lors d'une réunion de bureau des plus passionnantes, vous dessinez une courbe machinalement sur une feuille de papier. Il y a peu de chance que cette courbe soit identifiable mathématiquement, c'est-à-dire que l'on puisse dire que celle-ci est une parabole, un cercle, la représentation graphique de telle ou telle fonction...

Dans des domaines plus sérieux comme l'infographie ou l'industrie, on a souvent besoin de représenter, avec un ordinateur, des courbes ou des surfaces dont on ne connaît pas d'équations mathématiques.

C'est un problème qui s'est posé à l'entreprise automobile Renault au milieu du XX<sup>e</sup> siècle. Il fallait représenter les lignes et les surfaces de carrosserie, dessinées par les designers, pour réaliser les matrices d'emboutissage.

La pièce était définie par une succession de sections planes. Avant l'arrivée des machines à commande numérique, on créait manuellement une maquette de la carrosserie dans un matériau pouvant être modelé. Puis une machine à mesurer en trois dimensions recréait la surface en piquant une multitude de points sur la maquette. Le nombre de maquettes réalisées en cours de conception étant important (d'où pertes de temps), on a demandé aux designers de créer sur ordinateur les maquettes pouvant alors être facilement et rapidement réalisées en commande numérique.

Vers 1962, Pierre Bézier, ingénieur chez Renault a alors mis au point une méthode permettant de définir une courbe ou une surface par un nombre minimal de points caractéristiques. Cette méthode devait permettre de modifier facilement la surface par déplacement d'un minimum de points, et de pouvoir représenter toute surface sans « cassure » (continûment dérivable). L'idée directrice est de tracer une courbe en déplaçant le barycentre d'un certain nombre de points, appelés points de contrôle et affectés de coefficients dépendant d'une variable. En modifiant ensuite la position des points de contrôle, on déforme progressivement la courbe jusqu'à l'obtention du profil recherché. Ces méthodes sont encore utilisées en automobile ou en aéronautique.



Dans les années 1980, John Warnock, co-fondateur de la célèbre société Adobe, créa un langage de description de page adapté à la future imprimante laser conçue pour Macintosh. Il fallait trouver un moyen de définir mathématiquement une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante... Warnock choisit les courbes de Bézier cubiques (voir site) comme base de son nouveau langage PostScript, utilisé maintenant par la grande majorité des imprimantes laser et ayant fait la fortune d'Adobe. Les courbes de Bézier se retrouvent également dans des produits célèbres d'Adobe de dessins en mode vectoriel comme dans Illustrator ou Photoshop (tracé Plume) ou bien dans les logiciels GIMP ou TEX.

En mode vectoriel, tout tracé est restitué par une succession de vecteurs, de courbes élémentaires : segments, ellipses, etc., mais aussi de courbes de Bézier. Les points définissant les contours des caractères, par exemple, peuvent être définis comme l'intersection de segments de droites et de courbes de Bézier.

On peut agrandir, réduire ou recadrer facilement un dessin en mode vectoriel sans perte de qualité en introduisant un nombre qui définit la taille de l'affichage. Ce procédé prend moins de place que certaines images en format bitmap. Ainsi les courbes de Bézier, qui peuvent définir des courbes complexes en quelques points de contrôle, permettent de gagner de la place lors d'un enregistrement : les coordonnées des points de contrôle prennent moins de place que tous les points décrivant la courbe. De plus, le mode vectoriel est plus facile à manipuler : on applique les transformations usuelles, comme les homothéties, rotations, symétries, translations, directement sur les objets (par exemple, pour traduire une figure, on

applique un vecteur à la figure même, et non à chaque point de la figure comme on l'aurait fait pour des images en format bitmap).

Le bitmap (comme le logiciel Paint) est quant à lui un format de dessin basé sur une pixellisation, c'est-à-dire un accolement de points indépendants, qui seront stockés sur un support tel qu'un disque dur. En plus de prendre de la place, le bitmap interdit de changer la taille d'une image, sous peine de l'altérer, ceci à cause de l'indépendance des pixels les uns avec les autres. Les logiciels de dessin bitmap créent des images proches de la peinture car constituées d'une multitude de points (pixels) de couleur.

Un logiciel de dessin bitmap se reconnaît tout de suite à sa gomme. En mode vectoriel, cet outil n'existe pas car, pour faire disparaître un objet, il suffit d'activer la fonction « effacer » sur l'objet désiré.

Les courbes de Bézier cubiques sont aussi les courbes que l'on peut tracer dans [Paint](#) avec l'outil « Courbe », en traçant un trait de  $P_0$  à  $P_3$  puis en cliquant successivement aux lieux de  $P_1$  et  $P_2$ .

Une autre application des courbes de Bézier est la déformation des images par des logiciels de morphing grâce à un tramage de départ.

### A- Exemple avec deux points de contrôle.

Fixons deux points  $P_0$  et  $P_1$  dans le plan.

Pour  $t$  réel dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , soit  $M(t)$  le barycentre de  $(P_0 ; 1 - t)$  et  $(P_1 ; t)$ .

On s'intéresse à la courbe notée  $\mathcal{C}$  décrite par les points  $M(t)$  quand  $t$  varie dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

On dit que  $\mathcal{C}$  est la courbe de Bézier (de degré 1) associée aux points de contrôle  $P_0, P_1$ .

1. Quelle est la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Soit  $O$  un point du plan. Écrire  $\overrightarrow{OM}(t)$  en fonction de  $\overrightarrow{OP_0}$  et  $\overrightarrow{OP_1}$ .

### B- Exemple avec trois points de contrôle.

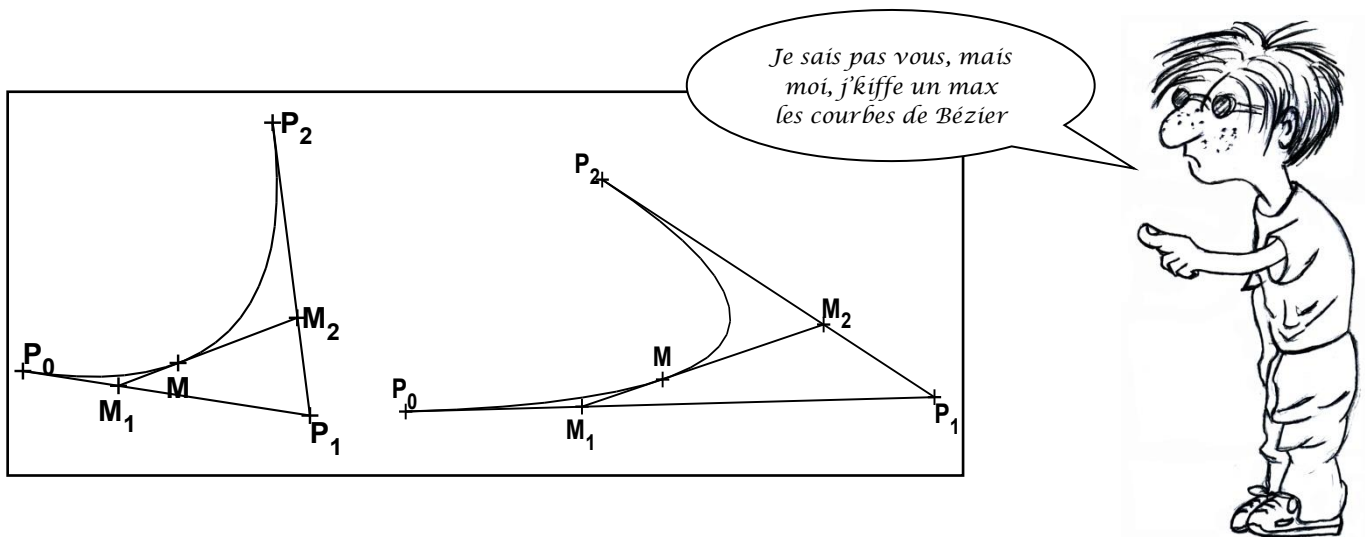
Fixons trois points  $P_0, P_1$  et  $P_2$  du plan. Pour  $t$  réel dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , on nomme :

- $M_1(t)$  le point courant sur la courbe de Bézier  $\mathcal{C}_1$  de points de contrôle  $P_0$  et  $P_1$ , c'est-à-dire le barycentre de  $(P_0 ; 1 - t)$  et  $(P_1 ; t)$ .
- $M_2(t)$  le point courant sur la courbe de Bézier  $\mathcal{C}_2$  de points de contrôle  $P_1$  et  $P_2$ , c'est-à-dire le barycentre de  $(P_1 ; 1 - t)$  et  $(P_2 ; t)$ .
- $M(t)$  barycentre de  $(M_1 ; 1 - t)$  et  $(M_2 ; t)$ .

On s'intéresse à la courbe, notée  $\mathcal{C}$ , décrite par les points  $M(t)$  quand  $t$  varie dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est la courbe de Bézier (de degré 2) associée aux points de contrôle  $P_0, P_1$  et  $P_2$ . Soit  $O$  un point du plan.

1. Écrire  $\overrightarrow{OM_1}(t)$  en fonction de  $\overrightarrow{OP_0}$  et  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}(t)$  en fonction de  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OP_2}$ .
2. a. Écrire  $\overrightarrow{OM}(t)$  en fonction de  $\overrightarrow{OM_1}(t)$  et  $\overrightarrow{OM_2}(t)$ . En déduire que  $M(t)$  est le barycentre de  $P_0, P_1$  et  $P_2$  dont on précisera les coefficients.  
b. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $P_0$  et  $P_2$  et qu'elle est à l'intérieur du triangle  $P_0P_1P_2$ .
3. Un vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M(t)$  est donné par la dérivée du vecteur  $\overrightarrow{OM}(t)$  par rapport à  $t$ , notée  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ .  
a. Calculer  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ .  
b. Montrer que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point de contrôle  $P_0$  est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point de contrôle  $P_2$  est dirigée par  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

*Remarque* : la courbe de Bézier  $\mathcal{C}$  associée à trois points de contrôle est un arc de parabole.



La courbe passe par  $P_0$  et  $P_2$ . On modifie son tracé en déplaçant le point de contrôle  $P_1$ . Celui-ci gouverne les tangentes à la courbe en  $P_0$  et  $P_2$ .

Dès que l'on veut créer une courbe donnée, on va en fait la dessiner par morceaux en utilisant non pas une mais plusieurs courbes de Bézier. Pour chaque morceau, chaque extrémité va être le premier et le dernier point de contrôle de la courbe. Il faut évidemment assurer, aux raccordements des morceaux, la continuité en courbure et en tangence.

4. Expliquer pourquoi pour chaque morceau de la courbe à tracer, trois points de contrôle ne suffisent pas.

### C- Quatre points de contrôle.

Intéressons-nous, s'il vous plait, aux courbes de Bézier cubiques (de degré 3), c'est-à-dire aux courbes de Bézier avec 4 points de contrôle  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ . Celles-ci sont construites sur le même algorithme que précédemment :

Pour  $t$  réel choisi dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , on nomme :

- $M_1(t)$  le point courant sur la courbe de Bézier  $\mathcal{C}_1$  de points de contrôle  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .
- $M_2(t)$  le point courant sur la courbe de Bézier  $\mathcal{C}_2$  de points de contrôle  $P_1$  et  $P_2$  et  $P_3$ .
- $M(t)$  barycentre de  $(M_1 ; 1 - t)$  et  $(M_2 ; t)$ .

On montre de la même manière que précédemment que :

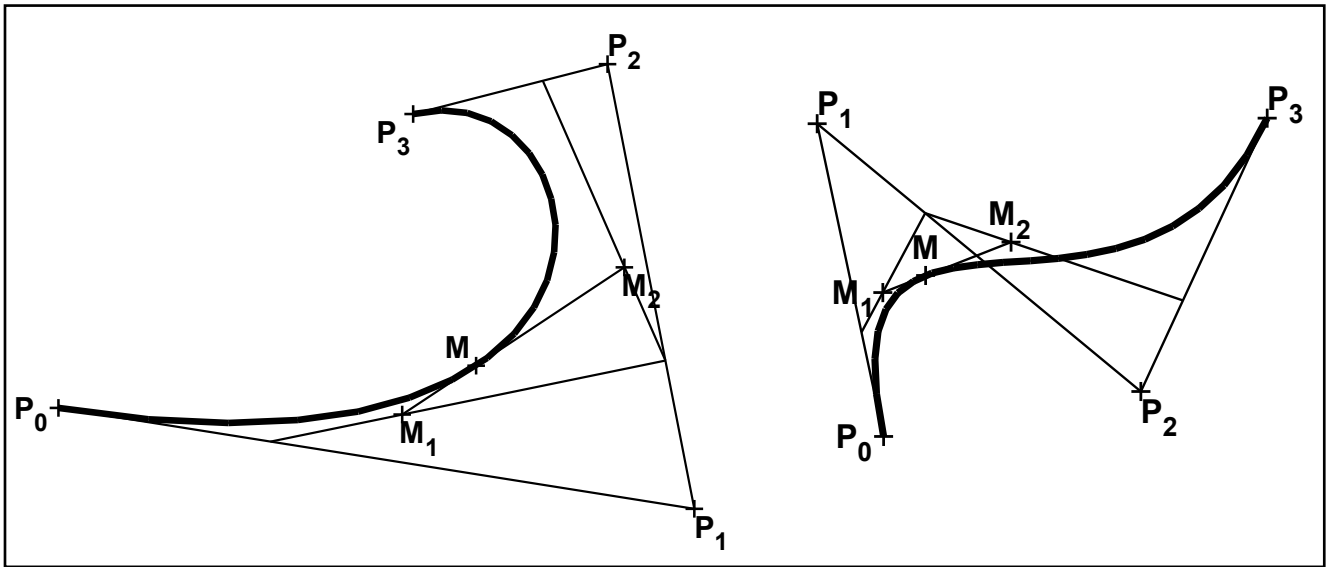
1) Pour tout point  $O$  du plan, pour tout  $t \in [0 ; 1]$  :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1 - t)^3 \overrightarrow{OP_0} + 3t(1 - t)^2 \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1 - t) \overrightarrow{OP_2} + t^3 \overrightarrow{OP_3}.$$

2) La courbe passe par les points  $P_0$  et  $P_3$  et est à l'intérieur du quadrilatère non croisé formé par les points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .

3) La tangente au point  $P_0$  est dirigée par  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et celle au point  $P_3$  est dirigée par  $\overrightarrow{P_2P_3}$ .

Ce sont les courbes de Bézier les plus utilisées (car elles permettent d'assurer la continuité en tangence et en courbure de deux courbes raccordées en ajustant les points  $P_1$  et  $P_2$  qui gouvernent respectivement les tangentes en  $P_0$  et  $P_3$ ).



Quatre points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  définissent une courbe de Bézier cubique. La courbe passe par les points  $P_0$  et  $P_3$ . En général, la courbe ne passe ni par  $P_1$  ni par  $P_2$ . Plus la distance  $P_0P_1$  est grande et plus la courbe va être « attirée » par  $P_1$  au début du tracé en  $P_0$ . Une remarque similaire est valable pour  $P_2$  et  $P_3$ .

Si maintenant plus généralement  $P_0, \dots, P_n$  sont  $(n + 1)$  points du plan, la courbe de Bézier  $\mathcal{C}$  de points de contrôle  $P_0, \dots, P_n$  est la courbe formée par les barycentres des points  $(M_1(t); 1 - t)$  et  $(M_2(t); t)$  où  $M_1(t)$  parcourt la courbe de Bézier de points de contrôle  $P_0, \dots, P_{n-1}$  et  $M_2(t)$  parcourt la courbe de Bézier de points de contrôle  $P_1, \dots, P_n$ .

1. En observant l'expression de  $\overrightarrow{OM}(t)$  dans les trois cas ci-dessus (2, 3 ou 4 points de contrôle), conjecturer une expression du coefficient multiplicatif de  $\overrightarrow{OP}_k$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  a les propriétés suivantes :

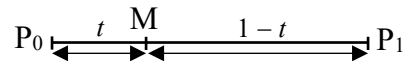
- Elle passe par  $P_0$  et  $P_n$ , mais pas en général par les autres points de contrôle.
- Les tangentes en  $P_0$  et  $P_n$  sont dirigées respectivement par  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ .
- La courbe est toujours contenue dans le polygone non croisé formé par les points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  (ce qu'on appelle l'enveloppe convexe des points  $P_0, P_1, \dots, P_n$ ).

Réponses :

A-

1. Comme  $M(t)$  est barycentre de  $(P_0 ; 1-t)$  et  $(P_1 ; t)$ , les points  $M(t)$ ,  $P_0$  et  $P_1$  sont alignés et comme  $t$  et  $1-t$  sont positifs, la courbe  $\mathcal{C}$  est le segment  $[P_0P_1]$ .

2.  $\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}$ .



B-

1.  $\overrightarrow{OM_1}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2}$ .

2. a.  $\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)\overrightarrow{OM_1}(t) + t\overrightarrow{OM_2}(t)$   
donc  $\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}$ .

$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1 + t^2 - 2t + 2t - 2t^2 + t^2 = 1$

donc le point  $M(t)$  est le barycentre de  $\{(P_0 ; (1-t)^2), (P_1 ; 2t(1-t)), (P_2 ; t^2)\}$ .

b. Pour  $t = 0$ ,  $M(0) = P_0$  et pour  $t = 1$ ,  $M(1) = P_2$ , donc la courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $P_0$  et  $P_2$ . Les coefficients  $(1-t)^2$ ,  $2t(1-t)$  et  $t^2$  étant positifs pour  $t \in [0 ; 1]$ ,  $M(t)$  est à l'intérieur du triangle  $P_0P_1P_2$ .

3. a.  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = -2(1-t)\overrightarrow{OP_0} + 2(1-2t)\overrightarrow{OP_1} + 2t\overrightarrow{OP_2}$ .

b. La tangente au point  $P_0$  est dirigée par le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}|_{t=0}$ .

$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}|_{t=0} = -2\overrightarrow{OP_0} + 2\overrightarrow{OP_1} = 2\overrightarrow{P_0O} + 2\overrightarrow{OP_1} = 2\overrightarrow{P_0P_1}$ .

La tangente au point  $P_2$  est dirigée par le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}|_{t=1}$

$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}|_{t=1} = -2\overrightarrow{OP_1} + 2\overrightarrow{OP_2} = 2\overrightarrow{P_1O} + 2\overrightarrow{OP_2} = 2\overrightarrow{P_1P_2}$ .

4. Si on a trois points de contrôle, seul le point  $P_1$  gouverne les tangentes à la courbe aux points  $P_0$  et  $P_2$  (celles-ci sont dirigées par  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$  respectivement) et donc ces tangentes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre et l'on n'a pas la liberté d'assurer la continuité en tangence aux raccordements.

C-

1.  $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  où  $\binom{n}{k}$  est le  $k^{\text{ième}}$  coefficient binomial.

Remarque : on reconnaît en  $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ , la probabilité pour une variable aléatoire binomiale de paramètres  $n$  et  $t$  de prendre la valeur  $k$ .