Deux élèves de la classe sont-ils nés le même jour ?

Niveau : première générale spécialité.

Lien avec le programme : probabilités : indépendance, répétition d'épreuves indépendantes, arbre pondéré ; variables aléatoires : espérance, linéarité de l'espérance ; simulation d'une expérience aléatoire. Algorithmique et programmation : listes (génération en compréhension, parcours, ajout d'un élément), programmation modulaire.

Lien avec *Les Maths au quotidien* : Insolite, Dates et heures, Sport.

Situation :

Le professeur annonce : « Je parie qu'au moins deux élèves de cette classe de 30 sont nés le même jour de l'année. » Pari risqué, avec 365 jours possibles pour seulement 30 élèves ?

Modèle. On ignore les naissances du 29 février. Chaque personne est née l'un des 365 jours de l'année, chaque jour ayant la même probabilité, et les dates de naissance des différentes personnes sont **indépendantes**. Les jours sont numérotés de 1 (1er janvier) à 365 (31 décembre).

Partie A : quelqu'un est-il né le même jour que moi ?

1. Quelle est la probabilité qu'une autre personne soit née le même jour que moi ? Qu'elle soit née un autre jour ?

2. J'ai 29 camarades dans la classe. On note E_i l'événement « le camarade numéro i n'est pas né le même jour que moi ».

a. Représenter l'arbre pondéré correspondant aux trois premiers camarades.

b. Justifier que la probabilité qu'aucun de mes 29 camarades ne partage mon anniversaire vaut $\left(\frac{364}{365}\right)^{29}$. En déduire la probabilité qu'au moins un camarade partage mon anniversaire.

c. Avec un ouyil numérique, combien de camarades faudrait-il pour que cette probabilité atteigne $\frac{1}{2}$?

Partie B : simuler des classes

Le pari du professeur ne porte pas sur **mon** anniversaire, mais sur **n'importe quelle** coïncidence entre deux élèves. Le fichier `anniversaires_a_completer.py` découpe la simulation en fonctions simples (programmation modulaire) :

Fonction	Rôle
`dates(n)`	renvoie la liste des jours d'anniversaire de n personnes
`coincidence(L)`	renvoie `True` si deux éléments de la liste `L` sont égaux
`frequence(N, n)`	simule N classes de n élèves et renvoie la fréquence des classes avec une coïncidence

1. **a.** Compléter le pointillé (1) pour que `dates(n)` génère la liste en compréhension. Exécuter `dates(30)` plusieurs fois et observer.

b. La fonction `coincidence(L)` parcourt la liste `L` en mémorisant les jours déjà rencontrés dans la liste `deja_vus`. Compléter les pointillés (2) et (3).

c. Compléter les pointillés (4) et (5) de la fonction `frequence(N, n)`. Expliquer comment elle utilise les deux fonctions précédentes.

2. Estimer, à l'aide de `frequence(10000, 30)`, la probabilité que le professeur gagne son pari. Ce pari était-il risqué ?

Partie C : calcul exact

1. On interroge les élèves un par un.

a. Sachant que les k premiers élèves sont nés des jours tous différents, quelle est la probabilité que l'élève suivant soit né un jour différent de chacun d'eux ? Où utilise-t-on l'indépendance ?

b. En déduire que la probabilité que les 30 élèves soient nés des jours tous différents vaut

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365}$$

2. Compléter le pointillé (6) de la fonction `proba_differentes(n)`, puis calculer la probabilité que le professeur gagne son pari. Comparer à la simulation de la question 4.

3. Compléter le pointillé (7) de la fonction `seuil()` pour obtenir le plus petit nombre de personnes à partir duquel une coïncidence a au moins une chance sur deux de se produire. Comparer avec la question 2.c.

Partie D : combien de paires nées le même jour, en moyenne ?

On note X le nombre de **paires** d'élèves nés le même jour dans une classe de 30.

1. Combien de paires d'élèves différentes peut-on former dans une classe de 30 élèves ? On pourra s'aider d'un tableau à double entrée.

2. Pour chaque paire, on note X_p la variable aléatoire qui vaut 1 si les deux élèves de la paire sont nés le même jour, et 0 sinon.

a. Calculer $E(X_p)$.

b. Exprimer X à l'aide des X_p, puis calculer $E(X)$ grâce à la linéarité de l'espérance.

3. Compléter les pointillés (8) et (9) des fonctions `nb_paires(L)` et `moyenne_paires(N, n)`, puis vérifier le résultat de la question 9 par simulation.

4. Expliquer pourquoi il suffit de 23 élèves pour avoir une chance sur deux de coïncidence, alors qu'il en faut bien plus pour que quelqu'un partage **mon** anniversaire. On pourra calculer le nombre de paires dans un groupe de 23 personnes.

Partie E : confronter au réel

1. Combien d'équipes sur 32 s'attendait-on à trouver, en moyenne, avec au moins une coïncidence lors de la Coupe du monde 2014 ? Comparer avec les 16 équipes observées.

2. En France, il y a moins de naissances les week-ends et les jours fériés, car de nombreux accouchements sont programmés. Cela rend-il les coïncidences plus ou moins probables que dans le modèle ? On pourra raisonner sur un cas extrême.

3. Vérifier le pari du professeur dans votre propre classe.

Point info :

Lors de la Coupe du monde de football 2014, des journalistes de la BBC ont vérifié les dates de naissance des joueurs des 32 équipes de 23 joueurs, à partir des listes officielles de la FIFA. Dans **16 équipes sur 32**, au moins deux joueurs étaient nés le même jour de l'année.

Le paradoxe des anniversaires est utilisé en cybersécurité. Les « empreintes » numériques qui protègent les mots de passe et les signatures électroniques peuvent prendre un nombre immense, mais fini, de valeurs. Comme pour les anniversaires, il faut beaucoup moins d'essais qu'on ne le croit pour trouver deux fichiers différents ayant la même empreinte : c'est l'« attaque des anniversaires », qui oblige à utiliser des empreintes très longues.