Remboursement d'un emprunt par annuités constantes

Niveau : term STG, avec un tableur comme Excel, sur des postes informatiques.
Lien avec le programme : suite géométrique – Tableur.
Lien avec *Les maths au quotidien* : **Banque / Plan de remboursement**.

Un homme veut emprunter à sa banque une certaine somme d'argent C, qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant n années, une certaines somme fixe a, appelée annuité.

La banque applique au capital C emprunté un taux d'intérêt annuel de t %.
Notons année 1 l'année où l'homme demande ce prêt.

On voit que l'annuité a remboursée l'année n est constituée de deux éléments :
- L'intérêt I_n produit par le capital restant dû.
- L'amortissement A_n correspondant à la part de capital remboursée.

Après versement de l'annuité la dette est diminuée du montant de l'amortissement.

Exemple :

Si le capital emprunté C est de 1 000 € et que taux d'intérêt annuel est de 6 %, alors une annuité de 100 € se décompose comme suit : - Intérêt : $1\,000 \times 0,06 = 60$ €
- Amortissement : $100 - 60 = 40$ €

Après le versement de cette annuité, la dette ne s'élève plus qu'à $1\,000 - 40 = 960$ €.

Étude d'un exemple sur tableur

On souhaite établir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 15 000 € sur 10 ans au taux annuel de 3 %.
Le remboursement se fait à annuités constantes selon le principe exposé précédemment.
L'objectif est de trouver le montant de l'annuité de manière à ce que le prêt soit totalement remboursé au bout de 10 ans.

1. Réaliser sur tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	**Capital emprunté**		15 000 €			
2	**taux d'intérêt**		3%			
3	**Annuité**		1 000 €			
4						
5						
6	**Année**	**dette en début d'année**	**Intérêt**	**Annuité**	**dette en fin d'année**	**Amortissement**
7	1	15 000 €	450 €			
8	2					
9	3					
10	4					
11	5					
12	6					
13	7					
14	8					
15	9					
16	10					

Les données seront à rentrer dans les cellules C1, C2 et C3. Les cellules de la zone (A7 : F16) ne contiennent que des formules.

2. Expliquer comment on peut obtenir la série de nombres de la zone (A7 : A16).
Quelle est la formule à rentrer en B7 ?
Quelles formules, destinées à être étendues vers le bas, faut-il rentrer dans les cellules C7, D7, E7, F7, B8 ?

Cellule	Formule
B7	
C7	
D7	
E7	
F7	
B8	

3. En procédant par *approximations* successives, déterminer le montant de l'annuité qui fera en sorte que la cellule E16 contienne la valeur 0.

4. Vérifier avec le tableur que la suite des amortissements est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

5. Construire de manière analogue le tableau d'amortissement d'un emprunt de 20 000 € sur 20 ans au taux annuel de 4 %.

Remarque : le tableur dispose de fonctions dites financières.

Par exemple la fonction VPM renvoie le montant de l'annuité suivant le taux et le nombre d'annuités (durée de remboursement). La fonction NPM, quant à elle, renvoie le nombre d'annuités suivant le taux et la valeur de l'annuité.

Étude théorique (technique !!)

Notations :

D_p	Dette en début de l'année p
I_p	Intérêts produit par D_p
A_p	Amortissement de la $p$ième année
t	Taux d'intérêt

Par définition on a :

$a = I_p + A_p$ (l'annuité de l'année p est la somme des intérêts et de l'amortissement de l'année p).

$D_p = D_{p-1} - A_p$ (le capital restant dû l'année p est la différence entre le capital restant dû l'année $p - 1$ et l'amortissement de l'année p).

$I_p = t\, D_{p-1}$ (les intérêts de l'année p sont produits par le taux d'intérêt t appliqué au capital restant dû l'année $p - 1$).

1. En utilisant le fait que l'annuité de la $p$ième année est égale à celle de la $(p + 1)$ième année donc que : $A_{p+1} + t\, D_p = A_p + t\, D_{p-1}$, montrer que :
$A_{p+1} = A_p + t\,(D_{p-1} - D_p)$ puis que $A_{p+1} = (1 + t)\, A_p$.
Quelle est la nature de la suite (A_p) ?

2. Si l'emprunt est remboursé en n années, la somme des amortissements est égale au montant du capital emprunté : $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
Montrer alors que : $C = A_1 \dfrac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = A_1 \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$
En déduire que $A_1 = C \dfrac{t}{(1+t)^n - 1}$

3. En partant de l'égalité $a = I_1 + A_1 = t\,C + A_1$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que :
$a = t\,C \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$.

En déduire que $\boxed{a = t\,C \dfrac{1}{1-(1+t)^{-n}}}$.

4. En utilisant la formule précédente, construire à l'aide du tableur une feuille de calcul qui affiche un tableau d'amortissement « *universel* » où les seules données à saisir sont :
- Le montant de l'emprunt
- Le taux d'intérêt annuel appliqué
- Le nombre d'annuités