

Les tours de Hanoï

Niveau : première générale, enseignement de spécialité. *Approfondissements.*

Lien avec le programme : suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suite géométrique : calcul du terme général. *Approfondissements :* Tours de Hanoï.

Capacités associées :

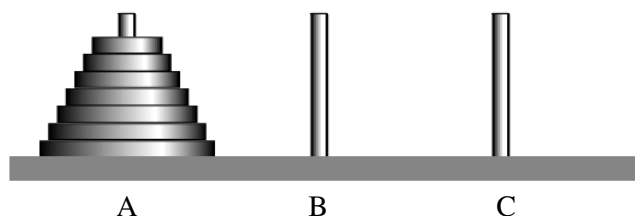
- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser les registres de la langue naturelle, algébrique, et passer de l'un à l'autre.
- Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.

Lien avec Les maths au quotidien : Loisirs. Tours de Hanoï.

Le casse-tête « **Les tours de Hanoï** » est un jeu composé d'une plaque où sont disposés trois piquets verticaux et d'anneaux que l'on enfle sur ces piquets. Au départ du jeu, tous les anneaux sont disposés les uns sur les autres sur l'un des piquets, par exemple le A, en formant une tour de forme conique : chaque anneau (sauf celui à la base de la tour) est placé sur un anneau plus grand.

Le jeu consiste à déplacer la tour vers un autre piquet, par exemple le C, en utilisant les trois piquets. On ne déplace qu'un anneau à la fois et chaque anneau ne peut être placé que sur un anneau plus grand, ou sur un piquet vide.

Soit n le nombre d'anneaux (n entier naturel non nul) et u_n le nombre minimal de déplacements pour réussir.



Partie A – Étude mathématique

1. Donner u_1, u_2, u_3 . C1
2. Expliquer pourquoi $u_4 = 11$. C6
3. a. Expliciter cette assertion :
« Pour déplacer les n anneaux, il faudra nécessairement être dans cette situation : tous les anneaux sont empilés sur le piquet B sauf le plus grand qu'on va pouvoir passer du premier piquet au dernier piquet. » C6
b. En déduire que $u_n = 2u_{n-1} + 1$. C2
c. Calculer u_5 puis u_6 . C5
4. On pose $v_n = u_n + 1$.
a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 2$. C4
b. En déduire u_n en fonction de n . C4
5. Calculer u_{20} et en déduire le temps nécessaire pour finir le jeu si un déplacement dure 2 secondes. C5

Partie B – Programmation

On souhaite créer un programme permettant d'afficher toutes les étapes à effectuer pour réussir à ce jeu.

La tâche paraît ardue, mais il existe en algorithmique une démarche qui peut s'avérer très simple à mettre en œuvre et très efficace dans certains cas : la *récurtivité*.

Un algorithme qui contient un ou des appel(s) à lui-même est dit récursif.

Autre exemple plus immédiat, un dictionnaire, qui contient des définitions de mots, est un exemple de récurtivité : chaque mot du dictionnaire est défini par d'autres mots eux-mêmes définis par d'autres mots dans ce même dictionnaire.

Pour programmer simplement le problème des tours de Hanoï, il faut penser récursivement.

Pour résoudre ce problème avec deux anneaux, on a déplacé du piquet A vers B, puis de A vers C pour finalement déplacer de B vers C (une seule opération est à chaque fois possible). Donc (2 – 1) anneau de A vers B, puis 1 anneau (le plus grand) de A vers C et à la fin (2 – 1) anneau de B vers C.

La logique est la suivante : "isoler le plus grand anneau de A puis le placer à la base de la tour de destination C puis appliquer le même algorithme de B vers C".

En résumé, l’algorithme de résolution des tours de Hanoï avec un nombre n d’anneaux est le suivant :

Déplacer n anneaux de A vers C en passant par B :

- Déplacer $(n - 1)$ anneaux de A vers B en passant par C ;
- Déplacer 1 anneau de A vers C ;
- Déplacer $(n - 1)$ anneaux de B vers C en passant par A.

En tenant compte de cet algorithme de résolution (récursif donc...), compléter les champs en pointillés de l’algorithme Python suivant. On pourra le programmer et fournir le script. C1 C2 C5

```
def hanoi(n,a,c,b):
    if ..... :
        hanoi(... , ... , ... , ...)
        print (... , "sur" , ...)
        hanoi(... , ... , ... , ...)
print ("Déplacer tous les anneaux de A sur C en passant par B")
n = input ("Donner le nombre d’anneaux sur A : ")
n=int(n)
print ("La procédure est la suivante : ")
hanoi(n,"A","C","B")
```



Dans ce document apparaissent en particulier les compétences suivantes :

COMPETENCES	Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition			
		-			+
C1 Chercher Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile.	A.1. B.				
C2 Modéliser Traduire en langage mathématique une situation réelle, à l'aide d'équations, de suites, de graphes... Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	A.3.b. B.				
C3 Représenter Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique. Passer d'un mode de représentation à un autre.					
C4 Raisonner démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective	A.4.a. A.4.b.				
C5 Calculer Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel). Mettre en œuvre des algorithmes simples.	A.3.c. A.5. B.				
C6 Communiquer Communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche	A.2. A.3.a.				