

Travaux de rénovation

Niveau : terminale ES spécialité.

Lien avec le programme : minimisation d'une grandeur (durée), graphe pondéré, longueur d'une chaîne, matrice d'adjacence.

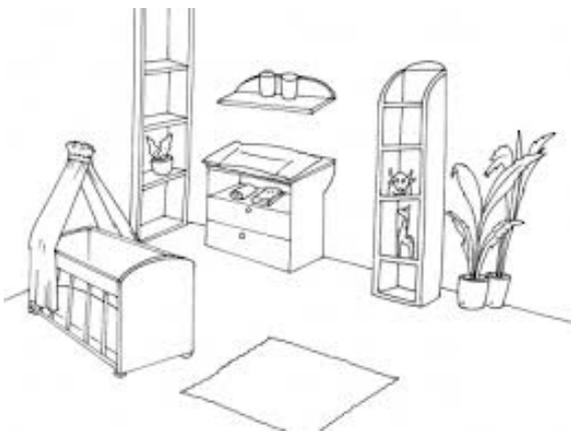
Lien avec Les maths au quotidien : Bricolage.

Document proche d'un document du Cned - Académie en ligne : www.academie-en-ligne.fr/Lycees → Term ES → Maths spé.

Sigismond et Thècle souhaitent rénover une chambre avant l'arrivée de leur bébé. Cela nécessite la réalisation de différentes tâches décrites dans l'échéancier ci-contre.

Les temps sont indiqués pour une personne.

Pour un travail impeccable, Thècle et Sigismond ne se partageront pas une même tâche.

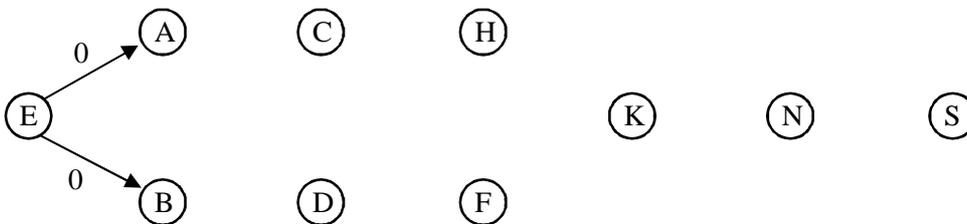


Code des tâches	Liste des tâches	Durée (en heures)	Tâches antérieures
A	Acheter du matériel	3	
B	Enlever la tapisserie	6	
C	Poser des tasseaux (sur un mur)	5	A – B
D	Ragrèer les murs	4	A – B
F	Peindre et laisser sécher (1 porte et 2 fenêtres)	12	C – D
H	Poser le lambris	7	C
K	Poser la tapisserie	10	F – H
N	Nettoyer la pièce	2	K

1. Recopier et compléter le graphe pondéré ci-dessous représentant l'ordonnancement des tâches, en respectant les consignes suivantes :

- L'existence d'une arête orientée $T_i \longrightarrow T_j$ signifie que la tâche T_j ne peut être exécutée que si la tâche T_i l'est.
- Le nombre figurant sur une arête $T_i \longrightarrow T_j$ est égal à la durée en heures de la tâche T_i .

Le sommet E est l'entrée, le sommet S est la sortie. Les sommets sont pris dans l'ordre $E, A, B, C, D, F, H, K, N, S$.



2. Quelle est la longueur des chaînes reliant E à S ?
3. a. Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe précédent.
 b. Calculer M^6 et en déduire le nombre de chaînes de longueur 6 reliant E à S .
 c. Écrire toutes les chaînes de longueur 6.

On dit qu'une chaîne **permet d'exécuter toutes les tâches**, si, pendant que Sigismond réalise les tâches de cette chaîne, Thècle peut exécuter les autres tâches de la rénovation, dans le même temps.

4. a. Parmi les chaînes de longueur 6, quelle est celle qui a un poids minimum ? Cette chaîne permet-elle d'exécuter toutes les tâches ?
 b. Expliquer pourquoi le chantier ne peut pas durer moins de 35 heures. La chaîne de longueur 6 et de poids 35 permet-elle d'exécuter toutes les tâches ?
 En déduire la durée minimale de réalisation de la rénovation et donner la séquence de tâches qui détermine cette durée optimale.
 c. Quelles sont les tâches pour lesquelles tout retard pris dans leur exécution entraîne un allongement de la durée minimale de réalisation ?
 d. En déduire les tâches qui peuvent supporter un léger retard dans leur exécution sans pour autant allonger la durée de la rénovation.

Point info :

- Une chaîne qui permet d'exécuter l'ensemble du projet dans une durée minimale est appelé un **chemin critique**. Il s'agit toujours d'un **plus long chemin** qui relie l'entrée à la sortie. L'algorithme de Dijkstra est un algorithme qui permet de déterminer un plus court chemin entre deux sommets. Il existe également des algorithmes qui permettent de déterminer un plus long chemin, comme par exemple l'algorithme de Bellman.

- Le principe précédent est celui de la méthode P.E.R.T (pour « Program Evaluation and Review Technic » ou « technique de contrôle et d'examen des programmes ») inventée en 1957 par l'US Navy pour son programme de missiles balistiques nucléaires miniaturisés POLARIS.

Cette méthode a permis de coordonner les travaux de près de 6 000 constructeurs dans les délais imposés par le gouvernement américain.

Ce projet POLARIS représentait entre autres 250 fournisseurs, 9 000 sous-traitants et 7 ans de réalisation. L'utilisation du P.E.R.T. a permis de ramener la durée globale de réalisation du projet de 7 à 4 ans.