

PÉNALTY

Niveau : terminales.

Lien avec le programme : probabilité conditionnelle et indépendance.

Lien avec Les maths au quotidien : Sport.

Lors d'un match de football, la réalisation d'un pénalty est un moment très intense, pour les joueurs comme pour le public. Il en est de même, et même davantage, lors des séances de tirs au but qui peuvent achever un match.

Face au but, le joueur doit choisir la zone de la cage dans laquelle il va tirer, celle à sa droite ou bien celle à sa gauche, et il en est de même pour le gardien. Évidemment, le tireur a bien plus de chances de réussir si le gardien plonge du mauvais côté.

Chacun sait que nous avons tous une jambe plus performante et il se trouve que les droitiers tirent mieux sur leur côté gauche, et les gauchers tirent mieux à leur droite.



L'économiste Ignacio Palacios Huerta a obtenu les données suivantes, après l'étude de 1 417 penaltys tirés par des footballeurs professionnels :

- 92,9 % (environ) des tirs au but ont été réussis dans le cas d'un tir du côté préféré du joueur et d'un plongeon du gardien du mauvais côté (les 5% restant correspondent à un ballon frappant le poteau ou hors du cadre).
- 95 % (environ) des tirs ont été réussis dans le cas d'un tir de l'autre côté que le côté préféré du joueur et d'un plongeon du gardien du mauvais côté.
- 58,3 % (environ) des tirs au but ont été réussis dans le cas d'un tir de l'autre côté que le côté préféré du joueur et d'un plongeon du gardien du bon côté.
- 69,9 % (environ) des tirs au but ont été réussis dans le cas d'un tir du côté préféré du joueur et d'un plongeon du gardien du bon côté.

Considérons maintenant M. Isidore Lotmoi, footballeur professionnel, et droitier du pied de surcroît.

Grâce aux statistiques ci-dessus, peut-on imaginer une stratégie pour optimiser son taux de réussite ?

Hypothèses simplificatrices :

- On suppose que les performances d'Isidore sont homogènes et fidèles à celles collectées par I. P. Huerta.
- Lors d'un tir au but, il n'y a pas de signes avant la frappe permettant à Isidore ou au gardien de prendre une décision : posture des hanches du tireur, plongée du gardien quelques millisecondes avant la frappe, position du gardien non au milieu du but...).
- On ne regarde pas si Isidore frappe à ras de terre ou dans la lucarne, ce qui mériterait une étude plus précise.

I- 1^{re} stratégie :

Isidore frappe toujours dans la zone de la cage à sa gauche, son côté préféré.

Mais alors un gardien aura connaissance de cela (en analysant les penaltys déjà tirés depuis le début de la stratégie).

1. Donner la stratégie d'un gardien se retrouvant à défendre sa cage devant Isidore.
2. Calculer alors la probabilité qu'a Isidore de marquer son pénalty.

II- 2^e stratégie :

Isidore, qui ne veut pas que sa seconde stratégie soit prévisible, choisit de lancer une pièce de monnaie (équilibrée) et de choisir le côté gauche ou droite en fonction du résultat Pile ou Face.

Toujours en analysant les tirs passés, le gardien aura connaissance de cette stratégie (via un test d'adéquation à une loi équirépartie...).

1. Donner la stratégie d'un gardien se retrouvant à défendre sa cage devant Isidore.
2. Calculer alors la probabilité qu'a Isidore de marquer son pénalty.

On voit que l'une des deux stratégies précédentes est meilleure que l'autre.
Mais peut-on faire encore mieux ? et si oui y-a-t-il une stratégie optimale pour le tireur ?

Remarquons aussi que cette problématique est symétrique car elle se pose aussi pour le gardien. Lui aussi a certainement un côté de préférence. Lui aussi ne peut pas plonger toujours du même côté car cela se saurait rapidement. Lui aussi a envie d'optimiser sa stratégie pour arrêter les tirs...

Cette problématique entre dans le cadre de la **théorie des jeux**, une discipline à la frontière des mathématiques et de l'économie, développée entre les années 1920 et 1950 principalement par le mathématicien américain John von Neumann. John Nash, qui a obtenu le prix Nobel d'économie en 1994 et le prix Abel en 2015, illustre distinction mathématique, a lui aussi apporté à la théorie des jeux une large contribution, avec notamment sa notion d'« équilibre » (John Nash est aussi le sujet du film *Un homme d'exception* avec Russel Crow).

Dans la théorie des jeux existe la notion de stratégie pure où chaque joueur choisit une stratégie déterministe, comme c'est le cas pour la première stratégie d'Isidore, et aussi de stratégie mixte, où chaque joueur choisit au hasard le coup qu'il joue parmi les coups possibles, comme c'est le cas pour la seconde stratégie.

Un équilibre de Nash est une situation où aucun joueur n'a intérêt de changer sa stratégie seul (sans que l'autre ne la change aussi).

Dans le cas qui nous intéresse, on montre qu'il existe effectivement un équilibre de Nash et qu'il est unique. En ce sens, cet équilibre de Nash fournit pour le joueur et le gardien une situation optimale pour eux, compte tenue de la stratégie de l'autre.

3^e stratégie : équilibre de Nash.

Devant le but, Isidore doit choisir au hasard un côté, le gauche ou le droit, mais pas forcément avec équiprobabilité (2^e stratégie). On va donc déterminer la probabilité pour Isidore de choisir de tirer à sa gauche (c'est son côté préféré) dans le cadre de l'équilibre de Nash.

Notons respectivement les évènements :

G : « Isidore tire à sa gauche », H : « le gardien plonge à la gauche d'Isidore »

M : « Isidore marque le but ».

Posons $x = P(G)$ et déterminons cette valeur.

L'équilibre de Nash, pour Isidore, consiste à faire en sorte que :

- ses probabilités de marquer soient identiques que le gardien plonge à droite ou plonge à gauche, c'est-à-dire que sa probabilité de réussir le tir soit indépendante de la stratégie du gardien.

L'équilibre, pour le gardien, consiste à faire en sorte que :

- ses probabilités d'arrêter le tir soient identiques, qu'Isidore tire à gauche ou à droite.

On suppose naturellement que les évènements G et H sont indépendants.

1. Donner $P_{G \cap H}(M)$, $P_{\bar{G} \cap H}(M)$, $P_{G \cap \bar{H}}(M)$, $P_{\bar{G} \cap \bar{H}}(M)$.
2. Expliquer pourquoi $P_H(M) = P_{G \cap H}(M) \times P_H(G) + P_{\bar{G} \cap H}(M) \times P_H(\bar{G})$.
3. En déduire que $P_H(M) = P_{G \cap H}(M) \times P(G) + P_{\bar{G} \cap H}(M) \times P(\bar{G})$ puis que $P_H(M) = -0,251x + 0,95$.
4. Montrer de même que $P_{\bar{H}}(M) = 0,346x + 0,583$.
5. En appliquant l'équilibre de Nash pour Isidore, déterminer x .

Confrontons maintenant cette étude mathématique avec la réalité :

Sur l'ensemble des penaltys analysés par Ignacio Palacios Huerta, 60 % ont été tirés du côté préféré du joueur. C'est très proche du résultat trouvé ci-dessus pour le droitier Isidore, non ?

On pourrait faire le même exercice pour déterminer le taux de plongeon du gardien du côté gauche d'Isidore dans cet équilibre de Nash. On trouverait 58 % (pour un taux observé de plongeurs du côté préféré du tireur de 57,7 % !).

Eh oui, les joueurs de foot, sans le savoir, sont des champions de mathématiques !

Point info : lors du quart de finale de la coupe du monde 2006 opposant l'Allemagne à l'Argentine, les deux équipes durent se départager par une séance de tirs aux buts. C'est alors que Jens Lehmann a sorti de sa chaussette un morceau de papier sur lequel l'entraîneur des gardiens allemand avait inscrit les préférences et les habitudes des tireurs argentins... Est-ce cela qui lui a permis d'arrêter deux penaltys ?