

La loi de Titius-Bode

Niveau : terminale ES.

Lien avec le programme : suite géométrique, limite de (q^n) ($q > 0$), suite arithmético-géométrique et traduction d'une situation donnée à l'aide d'une telle, (suite arithmétique, écart relatif : 1^{re}).

Lien avec Les maths au quotidien : Astronomie.

La loi de Titius-Bode est une loi empirique issue de l'observation. Elle établit une relation entre la distance des planètes au Soleil et leur rang, compté à partir du Soleil.

Elle a été énoncée par l'Allemand Johann Daniel Tietz (Titius) en 1766, mais elle est surtout connue grâce à Johann Elert Bode qui la publie en 1772, alors qu'il est directeur de l'observatoire de Berlin.

Titius a traduit en allemand l'ouvrage *Contemplation de la nature*, de l'auteur suisse Charles Bonnet (1720-1793). Il ajoute alors deux paragraphes personnels au bas de la septième page et au début de la huitième dans l'édition allemande de 1766.

Dans la première partie des notes ajoutées, Titius détaille la succession des différentes distances au Soleil des planètes historiques, de Mercure à Saturne, arrondi à l'entier :

« Si nous donnons 100 points à Saturne et 4 à Mercure, à Vénus correspondra $4 + 3 = 7$ points ; à la Terre $4 + 6 = 10$; à Mars, $4 + 12 = 16$; à la prochaine ce serait $4 + 24 = 28$, mais il n'y a pas de planète ; et ce sera $4 + 48 = 52$ points et $4 + 96 = 100$ points respectivement pour Jupiter d'abord et Saturne en second. »

Dans la seconde partie il ajoute :

« Si on donne la valeur 10 au rayon de l'orbite de la Terre, les rayons des autres orbites seront données par la formule $R_n = 4 \cdot 3^n$ où $n = -\infty$ pour Mercure et 0, 1, 2, 3, 4 et 5 pour les planètes qui suivent. »

Remarques : À l'époque, les planètes Uranus et Neptune, et la planète naine Pluton n'avaient pas encore été découvertes (respectivement en 1781, 1846 et 1930).

On appelle unité astronomique (ua) la distance Terre-Soleil. Titius prend donc pour unité 0,1 unité astronomique puisqu'il attribue 10 à la Terre...

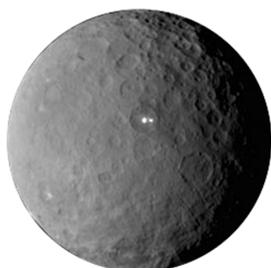
1. a. En considérant que R_n est donné sous la forme $a + b \times q^n$ dans le texte de Titius, déterminer a , b et q .
b. La suite (R_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Compléter le tableau suivant :
(dans la mesure du possible)

n	Planète	R_n Titius	Distance réelle ($\times 0,1$ ua)	Écart relatif entre distance réelle et R_n
	Mercure		3,9	
0	Vénus		7,2	
1	Terre		10	
2	Mars		15,2	
3	???			
4	Jupiter		52,1	
5	Saturne		95,4	

3. a. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- b. Expliquer alors l'étrange (et incorrecte pour vous) notation $n = -\infty$ dans le texte de Titius.



À l'époque, on ne connaît aucune planète correspondant au rang $n = 3$. Bode suggère l'existence d'une planète inconnue entre les orbites de Mars et Jupiter. Lui et le baron hongrois von Zach montent alors une société de savants pour la trouver, mais c'est le père italien Giuseppe Piazzi, fondateur de l'observatoire de Palerme, qui va les devancer. Le 1^{er} janvier 1801 (1^{er} jour du XIX^e siècle), il découvre un astre inconnu à la distance prévue par la loi de Titius-Bode, qu'il nomme Cérés, en l'honneur de la déesse protectrice de la Sicile. Cérés est l'astéroïde n°1 de la Ceinture Principale d'astéroïdes et a été classé, comme Pluton, planète naine en 2006.

4. Compléter le tableau suivant :

La loi de Titius-Bode s'applique-t-elle pour ces trois astres ?

n	Planète	R_n Titius	Distance réelle ($\times 0,1$ ua)	Écart relatif entre distance réelle et R_n
6	Uranus		191,8	
7	Neptune		301,1	
8	Pluton		398,8	