Les mathématiques des engrenages.
Par Nicolas TERRACOL (T°S3)
Math en jean's 2000/2001
Lycée d'Altitude de Briançon.

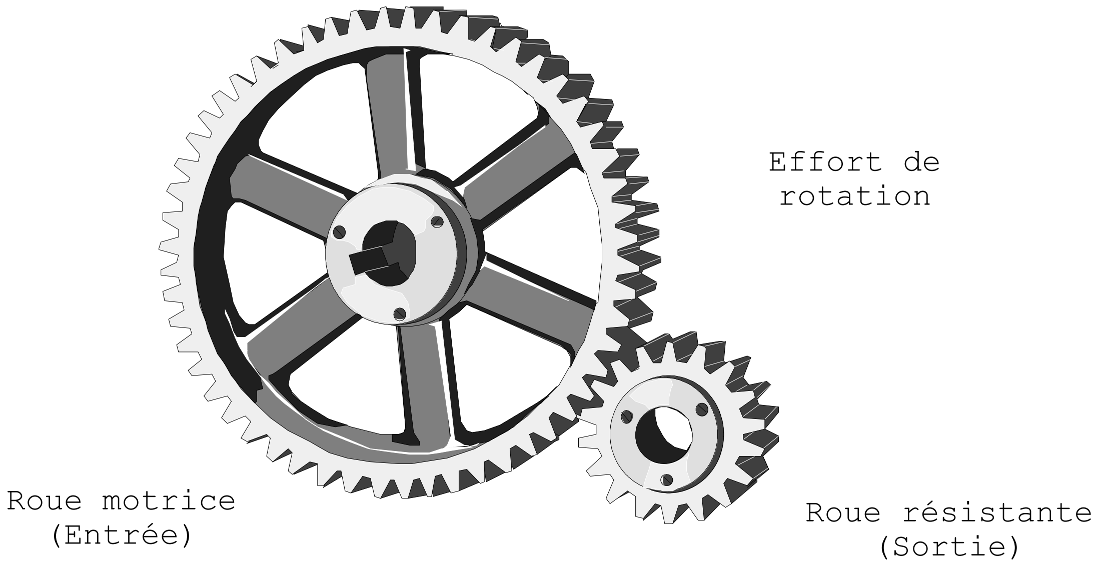
I)Présentation générale du problème:

On trouve dans de nombreuses machines des systèmes d'engrenages destinés à multiplier ou à démultiplier une vitesse d'entrée pour obtenir une vitesse de sortie bien particulière.
Les exemples sont nombreux, comme les boites de vitesse de nos voitures, ou encore les engrenages des montres et des horloges.
Nous disposons d'un arbre tournant à une vitesse angulaire w. A la sortie on veut une vitesse angulaire k.w où k=0,23 (par exemple).
Il faut donc essayer de trouver une méthode générale pour placer des engrenages (dont on définira le plus petit et le plus grand), qui ont par exemple entre 15 et 50 dents pour obtenir le rapport k.

II)Etude des engrenages

Historique

Les premières machines construites afin de modifier des vitesses angulaires étaient des roues de friction.
Ces roues étaient lisses et construites dans un matière qui avaient un fort coefficient de frottement.
Elles étaient maintenues en pression l'une contre l'autre, et le frottement qui se créait entre ces deux roues assurait la rotation des roues.



Mais ce système ne permettait pas de contrôler correctement le rapport k qui existait entre les vitesses angulaires d'entrée et de sortie. En effet les frottements qui existaient entre les roues n'étaient pas constants et le rapport k variait lui aussi.

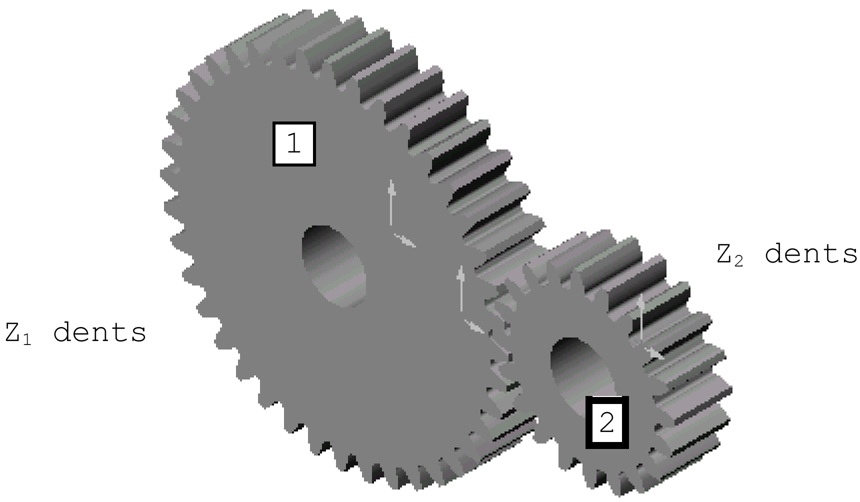
D'où l'idée de mettre autour de la roue des « obstacles », des dents pour augmenter la précision de la transmission de l'effort entre les roues.
Ainsi naissent les engrenages dotés de dents et qui permettent d'obtenir des rapports de transmission très précis.

<u>Etude du rapport de transmission dans un couple d'engrenages</u>

On appelle couple d'engrenages un montage constitué d'un pignon moteur denté et d'une roue réceptrice, elle aussi dentée.

Notations pour une roue d'engrenage:
On appelle W sa vitesse angulaire.
On appelle D son diamètre.
On appelle Z son nombre de dents.
On appelle p le pas de la denture.

Aux notations sont associés des indices qui les lient aux roues auxquelles elles se rapportent.
Par exemple W_2 correspond à la vitesse angulaire de la roue 2, Z_{25} le nombre de dents de la roue 25 etc....



Pour engrener les 2 roues d'un engrenage doivent avoir le même pas.

On a la relation qui lie la circonférence et le pas $\pi D = Z.p$
donc $p = \pi D/Z$
or $p_1 = p_2$
donc $\pi \dfrac{D_2}{Z_2} = \pi \dfrac{D_1}{Z_1}$ et donc $\dfrac{D_2}{Z_2} = \dfrac{D_1}{Z_1}$
Au point M les extrémités des 2 dents ont la même vitesse linéaire (et non pas angulaire).
On a la relation $V = \dfrac{W.D}{2}$ (Relation liant la vitesse avec la vitesse angulaire en fonction du rayon qui est la moitié du diamètre)

On a $V = \frac{W.D}{2}$ donc $D = \frac{2V}{W}$

On obtient la relation $\frac{2V}{Z_2.W_2} = \frac{2V}{Z_1.W_1}$

donc on en déduit que $\mathbf{W_1.Z_1=W_2.Z_2}$

Par définition le rapport d'un montage d'engrenage est égal au quotient de la vitesse angulaire de sortie sur la vitesse angulaire d'entrée.

Ce rapport est aussi égal au rapport inverse du nombre de dents des roues.

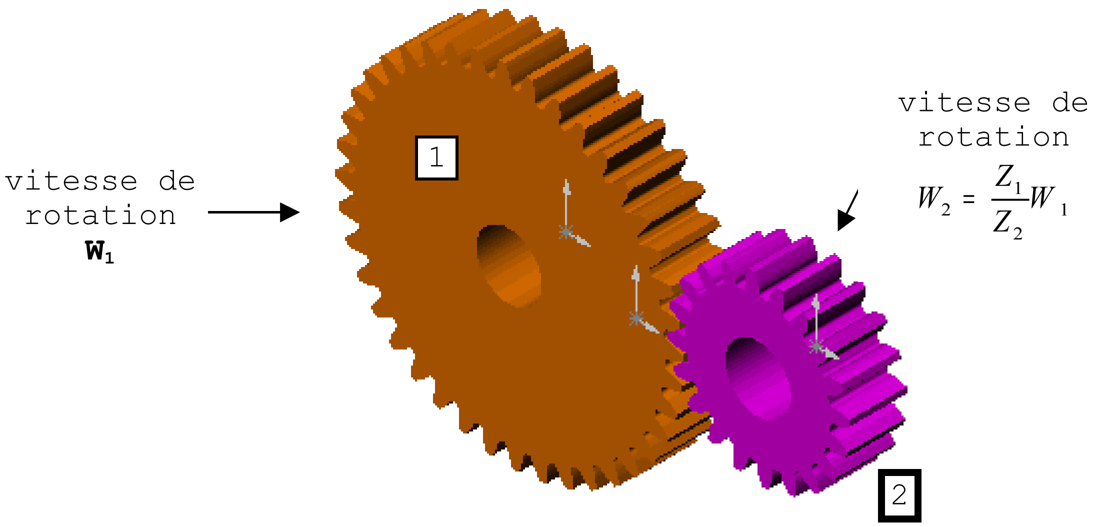
Soit k ce rapport de réduction alors

$$k = \frac{W_2}{W_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Remarques:

- On voit bien ici le rapport inverse du nombre de dents par rapport aux vitesses de rotation (inversion des indices).
- Il est important de considérer un rapport de réduction sous forme fractionnaire comme une chose qui existe. Ainsi si $k = \frac{47}{23}$ il s'agit du rapport de réduction formé par une roue de 47 dents et une roue de 23 dents.

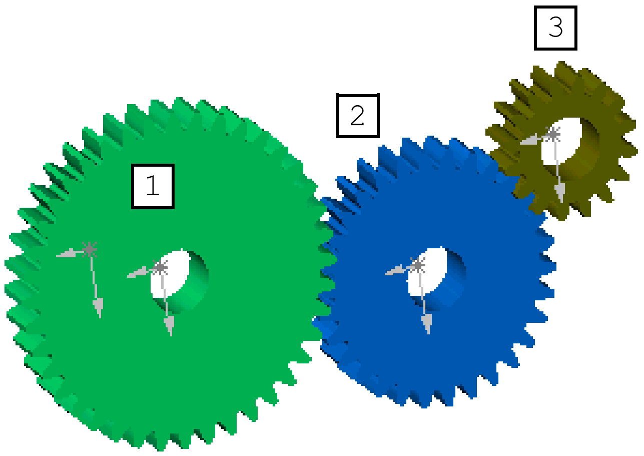
donc $W_2 = \frac{Z_1}{Z_2} W_1$



Nous voici désormais en possession de la formule de base des engrenages.

$$W_{Sortie} = \frac{Z_{Entrée}}{Z_{Sortie}} W_{entrée}$$

Etude des rapports de transmissions avec plusieurs couples d'engrenages



D'après la formule précédente on a:

$W_2 = \frac{Z_1}{Z_2} W_1$ (pour le premier couple d'engrenages {1+2})

on a aussi:

$W_3 = \frac{Z_2}{Z_3} W_2$ (pour le deuxième couple d'engrenages {2+3})

Si on remplace Z_2 par sa valeur on a:

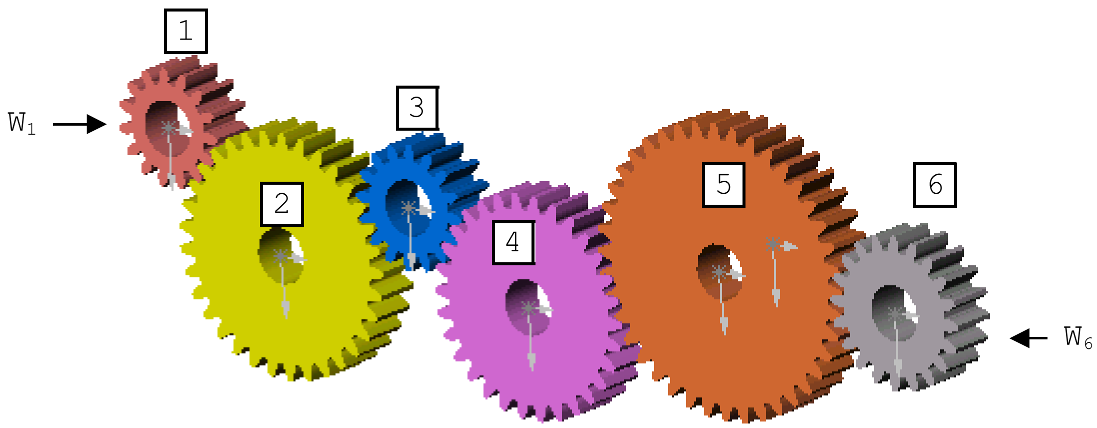
$W_3 = W_1 \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_2}{Z_3}$

En simplifiant on obtient $W_3 = W_1 \frac{Z_1}{Z_3}$

On retrouve bien ici notre relation initiale entre la vitesse d'entrée et celle de sortie. Cependant on s'aperçoit que la roue 2 n'a aucune influence sur le rapport de réduction de ce montage.

On démontre facilement par récurrence que les roues intermédiaires situées entre l'entrée et la sortie n'ont aucune influence sur le rapport de réduction du montage et ce quelque soit leur place et leur nombre.

Par exemple pour le montage suivant, les roues intervenant dans le rapport de réduction sont la 1 et la 6 seulement.

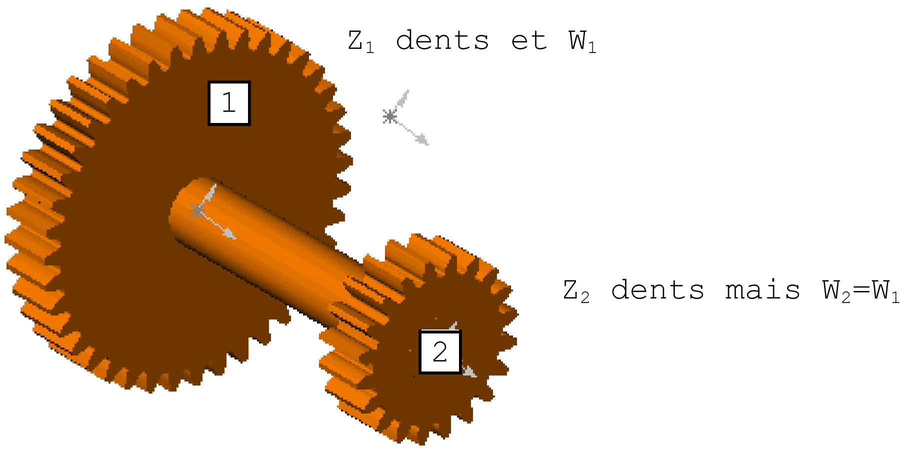


On a la relation $W_6 = W_1 \frac{Z_1}{Z_6}$

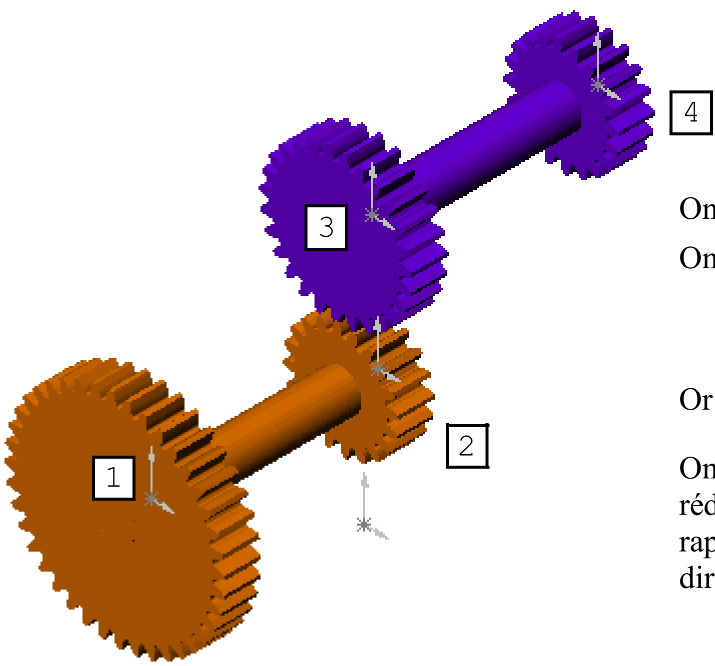
Les roues intermédiaires n'ont aucune influence sur le rapport de réduction. Le rapport ne dépend alors que du nombre de dents des roues d'entrée et de sortie. On n'aura donc qu'un nombre limité de rapports de réduction possibles et pas nécessairement ceux désirés. Par exemple si on veut réaliser le rapport **6**, il faut trouver 2 roues dont le quotient des nombres de dents vaut 6. Or dans notre intervalle [15,50] on ne dispose pas des roues nécessaires.

6 n'étant après tout pas réellement difficile à faire, on imagine assez bien que des rapports du type 0.28 ou 3.15478 sont irréalisables avec cette méthode.
Il faut donc imaginer une astuce pour élargir nos possibilités.

Si on utilise un arbre pour relier 2 roues on garde la même vitesse angulaire pour un nombre de dents différents.



<u>Etude d'un montage de 4 roues avec 2 arbres</u>



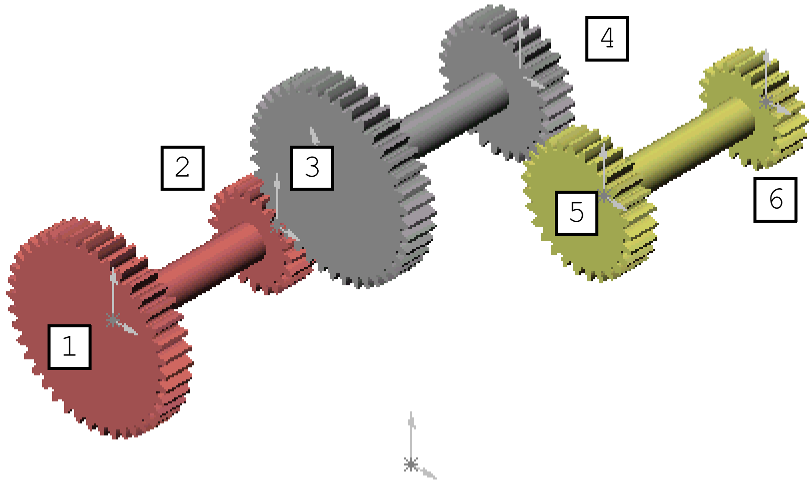
On cherche W_4 en fonction de W_1

On a $W_3 = W_1 \dfrac{Z_2}{Z_3}$

Or $W_4 = W_3$ donc $W_4 = W_1 \dfrac{Z_2}{Z_3}$

On s'aperçoit que le rapport de réduction de ce montage correspond au rapport des roues qui se touchent directement.

Montons plusieurs roues avec des arbres et étudions ce qui se passe.



On a les relations

$W_4 = W_1 \dfrac{Z_2}{Z_3}$ et

$W_6 = W_4 \dfrac{Z_4}{Z_5}$

donc $W_6 = \dfrac{Z_2}{Z_3} \cdot \dfrac{Z_4}{Z_5} . W_1$

On voit ici que le rapport de réduction de ce montage ($R = \dfrac{Z_2}{Z_3} \cdot \dfrac{Z_4}{Z_5}$) est égal au produit des rapports des roues qui se touchent directement.

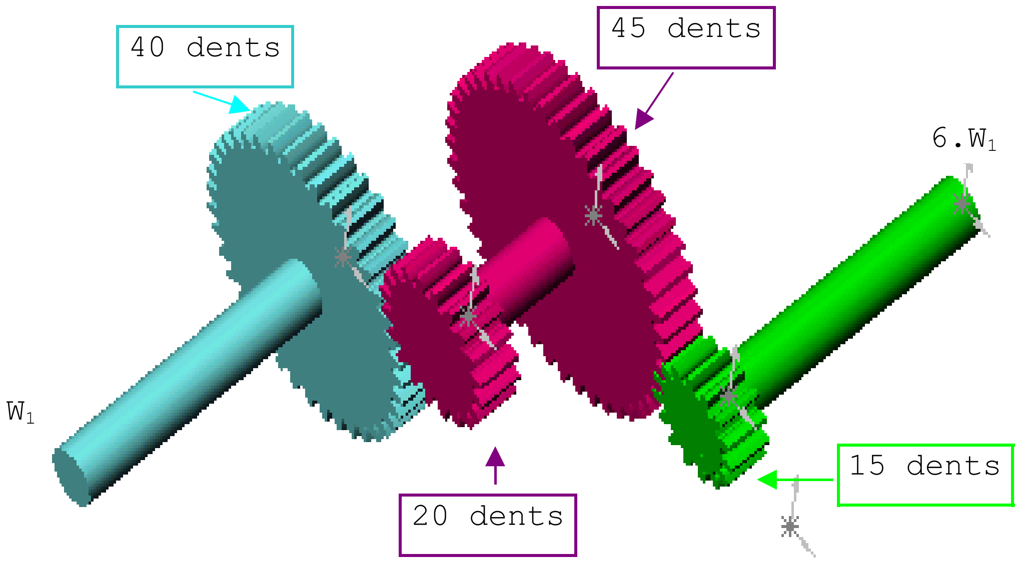
Par récurrence on démontre que le rapport total d'un montage du type précédent est égal au produit des rapports des montages intermédiaires (roues qui se touchent directement).

On a maintenant la relation suivante pour un montage avec n roues:

$$W_{Sortie} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \cdots\cdots \frac{Z_{n-1}}{Z_n} W_{Entrée}$$

On voit maintenant que si le rapport que l'on veut réaliser est compliqué il suffira de le décomposer en pleins de petits rapports simples à réaliser.
6 qui était infaisable tout à l'heure est désormais réalisable.

$6 = 2 \times 3 = \dfrac{40}{20} \times \dfrac{45}{15}$. Il suffit de monter en série deux montages ayant pour rapport 2 et 3 ce qui est très réalisable.



III) Analyse mathématique

On dispose désormais d'une technique qui nous permet d'obtenir des rapports plus complexes que précédemment. Mais essayons de trouver une méthode qui nous permettrait d'obtenir ces rapports.

L'intitulé de mon sujet suggérait des roues ayant entre 15 et 50 dents.
Voyons quels résultats nous pouvons obtenir.

Fractionnement des rapports
Il s'agit de fractionner le rapport désiré sous la forme d'un produit de rapports réalisables avec nos engrenages.

1= $^{15}/_{15}$

2= $^{40}/_{20}$

3= $^{45}/_{15}$

4= $2 \times 2 = {}^{40}/_{20} \times {}^{40}/_{20}$

5= $\frac{5}{4} \times 4 = {}^{20}/_{16} \times 4 = {}^{20}/_{16} \times {}^{40}/_{20} \times {}^{40}/_{16}$

7= $\frac{7}{6} \times 6 = {}^{21}/_{18} \times 2 \times 3 = {}^{21}/_{18} \times {}^{40}/_{20} \times {}^{45}/_{15}$

....

Les nombres-clés à réaliser sont les nombres premiers.
La technique de composition d'un rapport de réduction se décompose en 3 parties:

1-On considère le nombre premier que l'on veut réaliser par exemple 7
7 n'appartient pas à l'intervalle défini. Alors on le divise par un nombre proche de 7 de préférence inférieur à 7, on prend 6. Puis ensuite pour rattraper la division on remultiplie par ce même nombre.

$$7 = \frac{7}{6} \times 6$$

2-Ce rapport de 7/6 correspond à quelque chose de réel. Il s'agit du couple de roues d'engrenages composé d'une roue de 7 dents qui engrène avec une roue de 6 dents. Seulement on ne possède pas ces 2 roues. On multiplie alors ce rapport par un nombre entier de telle façon que l'on retrouve des nombres de dents compris dans l'intervalle.

$$\frac{7}{6} = \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{21}{18}$$

Cette opération inverse de simplification d'une fraction nous amène à un rapport de réduction composé par une roue de 21 dents et une roue de 18 dents qui sont toutes les 2 comprises dans l'intervalle.

Nous avons vu que la division du nombre premier à obtenir devait se faire avec un entier proche de ce dernier. En effet plus les 2 nombres du rapport sont proches plus on aura de chances qu'ils soient compris en même temps dans l'intervalle lorsqu'on les multiplie. Par exemple pour réaliser 11, si on divise par 2 on aura dans un premier temps le rapport 11/2. Pour que ce rapport soit faisable il faut le multiplier par 8 (au moins) pour que « le 2×8 se retrouve dans l'intervalle ». Mais alors 11×8 sort de l'intervalle et le rapport est irréalisable. Alors que si on divise 11 par 10 il suffit de multiplier ce rapport par 2 pour obtenir le rapport $22/20$ qui est réalisable.

3-Maintenant que le nombre premier est inclus dans un rapport réalisable, il ne reste plus qu'à multiplier ce rapport par le diviseur initial.
Ce diviseur doit être choisi plus petit que le nombre premier à réaliser, car il doit être lui aussi réalisable.
En effet il serait stupide d'introduire un nombre que l'on ne sait pas faire dans notre chaîne d'engrenages.
Pour 7 la solution consiste à diviser par 6 et à multiplier par 6, car 6 est proche de 7 et que 6 est réalisable ($6 = 2 \times 3$).
Ainsi pour 7 on obtient:

$$7 = \frac{7}{6} \times 6 = \frac{7 \times 3}{6 \times 3} \times 6 = \frac{21}{18} \times 3 \times 2 = \frac{21}{18} \times \frac{45}{15} \times \frac{40}{20}$$

Le montage du rapport 7 est donc constitué:
-d'une roue de 21 dent qui engrène avec une roue de 18 dents.
-d'une roue de 45 dent qui engrène avec une roue de 15 dents.
-d'une roue de 40 dent qui engrène avec une roue de 20 dents.

La méthode décrite est très efficace. Quels résultats pouvons nous obtenir?

Il existe 3 grands domaines dans cette étude.
Les nombres premiers qui se trouvent avant l'intervalle (ex :5;7;11), ceux qui sont compris dans l'intervalle (ex:17;29), et ceux qui se trouvent au dessus de l'intervalle (ex:53).

- Nous avons vu que l'on pouvait réaliser les nombres qui étaient avant l'intervalle.
  2= 40/20
  3= 45/15

Ils sont réalisables car ils ont des multiples qui appartiennent à l'intervalle.(15;22;...)

- Ceux qui sont dans l'intervalle ne pose pas de problèmes car ils existent de manière réelle dans l'intervalle. 17 existe sous la forme d'une roue de 17 dents. En la combinant avec d'autres roues on arrive à faire ressortir le nombre 17.

- Mais on ne peut pas réaliser les nombres premiers supérieurs à l'intervalle, car ils n'ont aucun lien avec les roues de l'intervalle.

Si on applique la méthode précédente à 53, on obtient $\frac{53}{52} \times 52$. Mais le rapport $\frac{53}{52}$ est irréalisable. Il faudrait le simplifier mais il est irréductible.
Ce résultat n'est qu'une conjecture, mais il semble que l'on ne puisse pas réaliser les nombres premiers supérieurs à l'intervalle.

Nous avons fait des rapports supérieurs à 1, alors comment faire pour obtenir des rapports inférieurs à 1?

Si on arrive à fabriquer un rapport supérieur à zéro, on arrive alors immédiatement à construire son inverse.
En effet $6 = \frac{40}{20} \times \frac{45}{15}$ donc $\frac{1}{6} = \frac{20}{40} \times \frac{15}{45}$

Il devient alors extrêmement simple de réaliser n'importe quel rapport (mis à part ceux contenant un nombre premier supérieur à l'intervalle).

Par exemple si k=0,28 alors on écrit que $k = \frac{28}{100}$.
On réalise la chaîne ayant un rapport de réduction de 28, puis celle ayant un rapport de 100 que l'on inverse. Il suffit ensuite d'assembler en série ces deux chaînes pour obtenir une chaîne ayant un rapport de réduction k=0,28.

On peut appliquer cette méthode pour n'importe quel rapport.

<u>Cas général</u>
Dans le cas général on raisonnerai avec un intervalle du type [a;b] où a et b sont les roues extrêmes.
Pour des raisons technologiques a ne peut pas être inférieur à une dizaine de dents.
Dans le cas général il semble que la technique décrite précédemment fonctionne tout à fait (conjecture) sitôt que l'intervalle nous permet de réaliser le rapport 2 qui est la base de la méthode de division puis de remultiplication.