Transformation géométrique d'une image

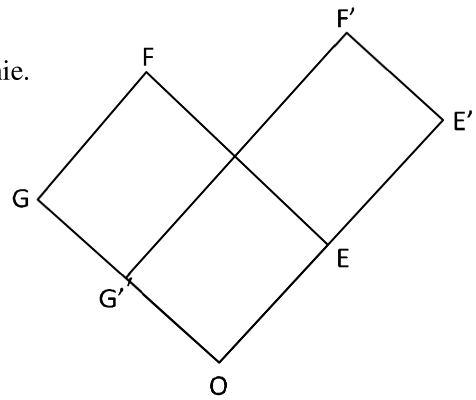
Niveau : Terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme :
Exemple de représentations matricielles : transformations géométriques du plan.

Lien avec Les maths au quotidien :
Représentations visuelles.

Compétences mises en jeu :
Chercher (C1), Modéliser (C2), Représenter (C3), Calculer (C4), Raisonner (C5), Communiquer (transversale, (C6)).

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie. Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.



L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), (−1 ; 5) et (−3 ; 3).
La transformation du logiciel associe à tout point $M\,(x ; y)$ du plan le point $M'(x' ; y')$, image du point M tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{cases}$$

1. **a.** Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation. **C4**

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part. **C3**

2. Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. **C1**

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère la fonction Python ci-contre, dont le paramètre est le nombre N d'images successives souhaitées, et destinée à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées. **C2**

```
def transfo(N):
    x = -1
    y = 5
    for i in range(N):
        x,y = 5/4*x + 3/4*y,3/4*x + 5/4*y
    print(x,y)
```

2. On fait tourner l'algorithme modifié (en classe ou à la maison).
   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F. **C1**

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points E_n $(x_n\ ;\ y_n)$ du plan par E_0 = E et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où $(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$. **C5**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$. **C5**

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. **C5**

Partie D

Le logiciel permet de faire d'autres transformations.

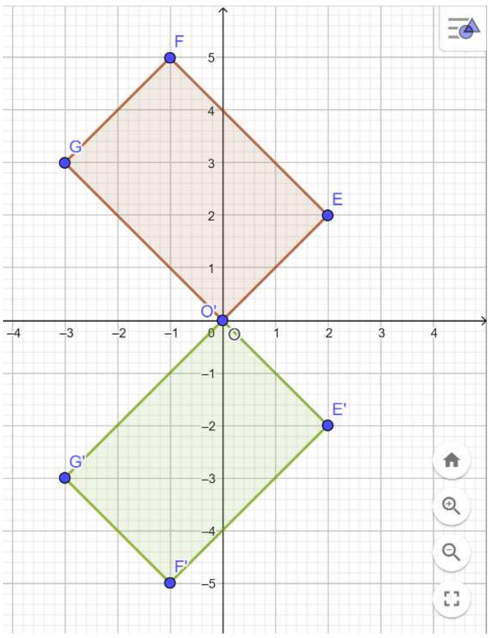
On rappelle que le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, que les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\ ;\ 2)$, $(-1\ ;\ 5)$ et $(-3\ ;\ 3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La transformation du logiciel associe à tout point M $(x\ ;\ y)$ du plan le point $M'(x'\ ;\ y')$, image du point M tel que :

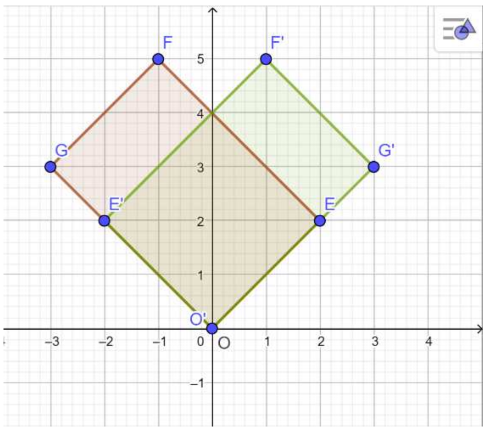
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ où } A \text{ est une matrice carrée d'ordre 2.}$$

Déterminer la matrice A dans les cas suivants : **C2**

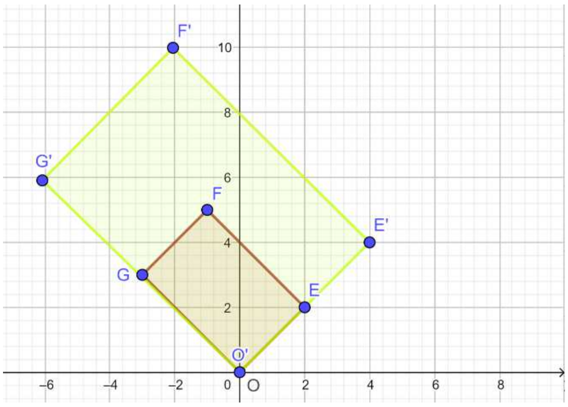
1.



2.



3.



4. La transformation est la ……………. de centre … et d'angle θ = ……. Sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.