Transformation au rugby

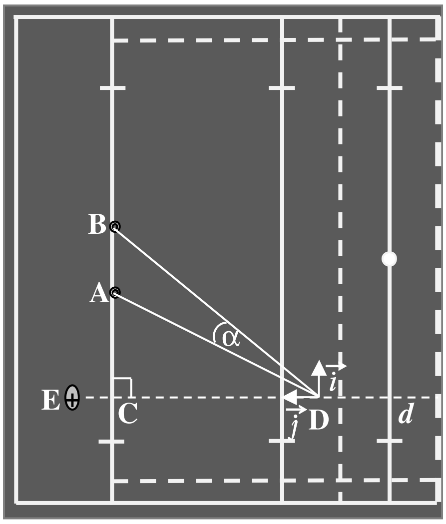
Niveau : 1re générale.
Lien avec le programme : Géométrie, produit scalaire dans le plan, fonction trigonométrique, calcul formel, dérivée, extremum d'une fonction.
Lien avec ***Les maths au quotidien*** : **Sport / Rugby**.

Se référer à la fiche de compétences. La compétence C6 est transversale à l'ensemble des questions.

COMPETENCES ATTENDUES	**Chercher C1**				
	Modéliser C2				
	Calculer C4				
	Raisonner C5				
	Communiquer C6				

Ce soir, c'est France-Angleterre au stade de France et Michalak marque un essai au point E (voir figure) et rapporte ainsi 5 points supplémentaires à la France. La règle stipule qu'un joueur français doit tenter de transformer l'essai pour marquer 2 points supplémentaires. Pour cela, le ballon doit être posé sur la droite *d*, perpendiculaire à (AB) passant par E, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. Soit D le point de *d* où l'on va poser le ballon et C l'intersection de (DE) et (AB). On suppose que le buteur n'a pas de problème de puissance. La transformation a le plus de chances de réussir pour une valeur de l'angle $\widehat{ADB}$ maximale (on néglige l'influence de la hauteur prise par le ballon sur l'angle de tir). Notons $\alpha = \widehat{ADB}$.

La question est alors : où doit-on placer le ballon ?



Transformation au rugby

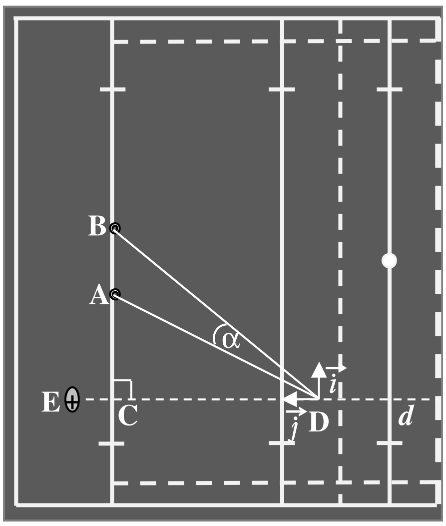
Niveau : 1re générale.
Lien avec le programme : Géométrie, produit scalaire dans le plan, fonction trigonométrique, calcul formel, dérivée, extremum d'une fonction.
Lien avec ***Les maths au quotidien*** : **Sport / Rugby**.

Se référer à la fiche de compétences. La compétence C6 est transversale à l'ensemble des questions.

COMPETENCES ATTENDUES	**Chercher C1**				
	Modéliser C2				
	Calculer C4				
	Raisonner C5				
	Communiquer C6				

Ce soir, c'est France-Angleterre au stade de France et Michalak marque un essai au point E (voir figure) et rapporte ainsi 5 points supplémentaires à la France. La règle stipule qu'un joueur français doit tenter de transformer l'essai pour marquer 2 points supplémentaires. Pour cela, le ballon doit être posé sur la droite *d*, perpendiculaire à (AB) passant par E, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. Soit D le point de *d* où l'on va poser le ballon et C l'intersection de (DE) et (AB). On suppose que le buteur n'a pas de problème de puissance. La transformation a le plus de chances de réussir pour une valeur de l'angle $\widehat{ADB}$ maximale (on néglige l'influence de la hauteur prise par le ballon sur l'angle de tir). Notons $\alpha = \widehat{ADB}$.

La question est alors : où doit-on placer le ballon ?



On se place dans le repère orthonormé direct $(D ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i}$ vecteur normé directeur de la droite (AB), de même sens que $\overrightarrow{AB}$ (et donc $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{DC}$, de même sens que $\overrightarrow{DC}$).
Les distances sont exprimées en mètres. On pose $a = AC$ et $x = CD$. On a $AB = 5,6$.

1. Donner les coordonnées des points D, A et B dans ce repère. **C1**

2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$, dont l'une en fonction de α. **C4**

3. En déduire $\cos\alpha$ en fonction de a et de x. **C5**

4. Justifier que la mesure de l'angle α comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians est maximale quand $\cos\alpha$ est maximal. **C6**

5. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+a(a+5,6)}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+(a+5,6)^2}}$.

Voici une feuille de travail effectuée avec un logiciel de calcul formel.

1

$$f(x) := \frac{x^2+(a+5.6)\,a}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+(a+5.6)^2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{f(x) :=} \frac{a\left(a+\frac{28}{5}\right)+x^2}{\sqrt{\frac{1}{25}}\,\sqrt{25x^2+(5a+28)^2}\,\sqrt{a^2+x^2}}$$

2

Simplifier(f'(x))

$$\rightarrow -784\,x\,\frac{5a^2+28a-5x^2}{(a^2+x^2)(25a^2+280a+25x^2+784)\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{25a^2+280a+25x^2+784}}$$

a. Expliquer pourquoi $f'(x)$ a le même signe que $5x^2-5a^2-28a$. **C6**
Déterminer ce signe (en fonction de $a > 0$). **C4**

b. Répondre à la question initiale (en fonction de a). **C2 C5**

6. Répondre à la question initiale pour $a = 15$ puis pour $a = 25$. **C4**

On se place dans le repère orthonormé direct $(D ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i}$ vecteur normé directeur de la droite (AB), de même sens que $\overrightarrow{AB}$ (et donc $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{DC}$, de même sens que $\overrightarrow{DC}$).
Les distances sont exprimées en mètres. On pose $a = AC$ et $x = CD$. On a $AB = 5,6$.

1. Donner les coordonnées des points D, A et B dans ce repère. **C1**

2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$, dont l'une en fonction de α. **C4**

3. En déduire $\cos\alpha$ en fonction de a et de x. **C5**

4. Justifier que la mesure de l'angle α comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians est maximale quand $\cos\alpha$ est maximal. **C6**

5. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+a(a+5,6)}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+(a+5,6)^2}}$.

Voici une feuille de travail effectuée avec un logiciel de calcul formel.

1

$$f(x) := \frac{x^2+(a+5.6)\,a}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+(a+5.6)^2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{f(x) :=} \frac{a\left(a+\frac{28}{5}\right)+x^2}{\sqrt{\frac{1}{25}}\,\sqrt{25x^2+(5a+28)^2}\,\sqrt{a^2+x^2}}$$

2

Simplifier(f'(x))

$$\rightarrow -784\,x\,\frac{5a^2+28a-5x^2}{(a^2+x^2)(25a^2+280a+25x^2+784)\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{25a^2+280a+25x^2+784}}$$

a. Expliquer pourquoi $f'(x)$ a le même signe que $5x^2-5a^2-28a$. **C6**
Déterminer ce signe (en fonction de $a > 0$). **C4**

b. Répondre à la question initiale (en fonction de a). **C2 C5**

6. Répondre à la question initiale pour $a = 15$ puis pour $a = 25$. **C4**