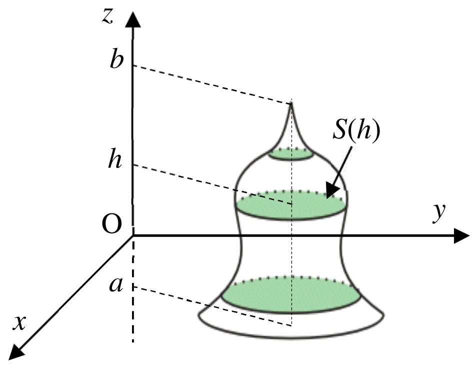
Un problème de rond de serviette

Niveau : Terminale S. Séance d'approndissement en accompagnement personnalisé.
Lien avec le programme : Calcul intégral. AP : calcul du volume d'un solide.
Lien avec Les maths au quotidien : Bricolage/Représentations Visuelles/Insolite.

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$. On considère un solide compris entre deux plans parallèles au plan (xOy) d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ ($a < b$). Pour $h \in [a\ ;\ b]$, soit $S(h)$ l'aire de la section du solide avec le plan d'équation $z = h$ (parallèle au plan (xOy)).



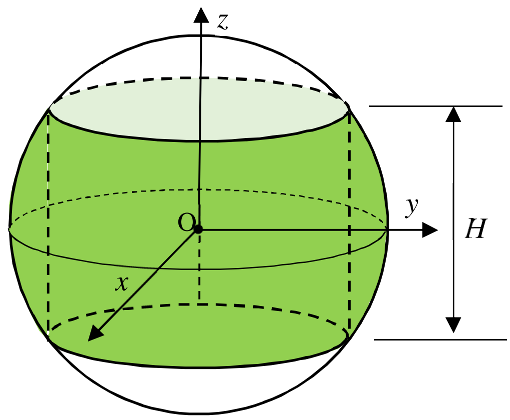
<u>Propriété</u> : le volume $\mathcal{V}$ du solide est donné par $\mathcal{V} = \int_a^b S(h)\,\mathrm{d}h$, exprimé en unités de volume.

Un menuisier fabrique de jolis ronds de serviettes en bois.

Pour cela, il se sert de boules de bois de différents diamètres. Les ronds de serviette ont tous la même hauteur H cm. Ils sont symétriques par rapport au plan équatorial de la boule. Le « trou » de chaque rond de serviette est un cylindre.

Soit R le rayon en cm de la boule utilisée pour fabriquer le rond de serviette.

Le but du problème est de montrer que le volume du rond de serviette ne dépend pas du rayon de la boule utilisée.



1. Calculer le rayon r_{cyl} du cylindre en fonction de R et de H.

2. Plaçons-nous à une côte h comprise entre $-\dfrac{H}{2}$ et $\dfrac{H}{2}$.

Montrer que le rayon $r(h)$, en cm, de l'intersection de la sphère avec le plan d'équation $z = h$ est $\sqrt{R^2 - h^2}$.

3. **a.** Calculer l'aire $A(h)$ de l'intersection du « rond de serviette » avec le plan d'équation $z = h$.

b. En déduire le volume V du rond de serviette en fonction de R et de H.

c. Répondre au problème posé.

4. Retrouver par cette occasion le volume d'une boule de rayon R et d'un cylindre de rayon r et de hauteur H.

Point info : une version de ce problème est posée au XVII^{e} siècle dans les mathématiques japonaises par Seki Kōwa.