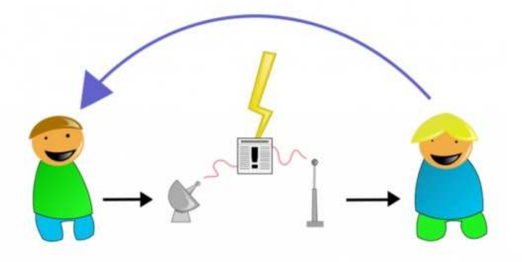
Ligne de transmission et code de Hamming

Niveau : terminale S spécialité. Exercice 4 de bac S Asie juin 2017.

Lien avec le programme : marche aléatoire, matrices carrées, matrice inverse d'une matrice carrée, exemple de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2, suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = A\,U_n$. Division euclidienne.

Lien avec Les maths au quotidien : Codage.

Les deux parties sont indépendantes



Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :
- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :
- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

On définit les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$. Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

1	$X0 := [[1], [0]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	M
2	P := [[1, 1], [1, −1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	M
3	D := [[1, 0],[0,2 * p − 1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{bmatrix}$	M
4	$P*(D\hat{}n)*P\hat{}(-1)*X0$	
	$\begin{bmatrix} \dfrac{(2*p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$	M

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98.
On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1.
On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25.
Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.

Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :
- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. **Préliminaires**
   a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
   b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :
- la valeur de c_1 est inchangée ;
- la valeur de c_2 est modifiée ;
- la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits : $A = 0100010$ et $B = 1101001$.
On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.