Méthode de Héron

Niveau : première générale, enseignement de spécialité.

Lien avec le programme : suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite. Fonction polynômes de degré 2. Méthode de Héron pour l'approximation numérique des racines carrées. Algorithmique et programmation.

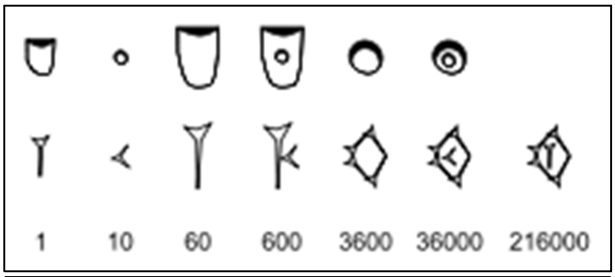
Lien avec *Les maths au quotidien* : Société.

I- Système sexagésimal

Le **système sexagésimal** est un système de numération utilisant la base 60, c'est-à-dire les puissances de 60 et non pas les puissances de 10 comme dans notre système décimal.

Le système sexagésimal semble avoir été utilisé pour la première fois par les Sumériens au III^e millénaire av. J.-C. puis, au II^e millénaire av. J.-C., par les Babyloniens, qui ont inventé la numération mésopotanienne.

Par la suite, les Chinois, les Indiens, les Grecs, les Arabes et les Européens ont aussi utilisé ce système.



Signes numériques « proto-cunéiformes » avec le système sexagésimal (60, 600, 3600, etc.)

Certains peuples, comme les Vietnamiens, comptent leurs phalanges avec le pouce ; le pouce défile sur les trois phalanges des quatre autres doigts, soit douze phalanges. Si par ailleurs on utilise les doigts de l'autre main pour les retenues, on a cinq retenues, soit 5×12 = 60 nombres. Selon l'historien des calculs Georges Ifrah, on peut supposer que la numération en base 60 vient de là.

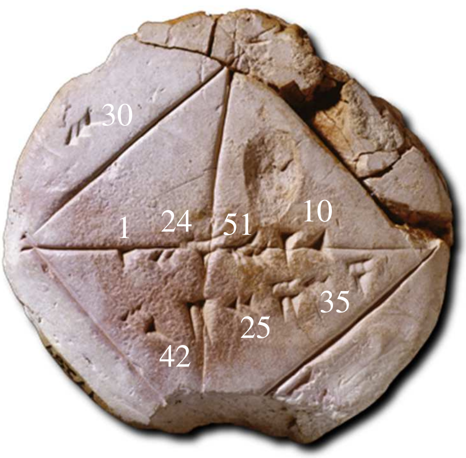
Cette numérotation a fini par être délaissée par les civilisations suivantes, et aujourd'hui, elle ne reste utilisée que pour des usages spécifiques telle que la division d'heures (temps) et degrés (angles) en minutes et en secondes.

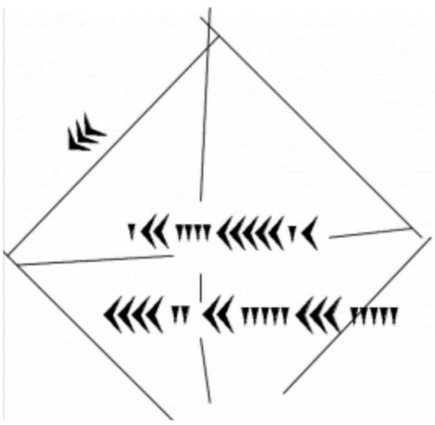
II- Une tablette babylonienne

La tablette YBC 7289 a probablement été écrite par un scribe babylonien de la première dynastie, ce qui la situe entre 1900 et 1600 av. J.-C. La forme et les dimensions de la tablette laissent supposer qu'elle a été écrite, dans le sud de l'Irak actuel, par un apprenti scribe utilisant des valeurs connues issues d'une liste.

De telles tablettes, rondes et petites (entre 8 et 12 cm en général) tenaient aisément dans la main.
Elle est actuellement conservée à l'université Yale.

Elle constitue à la fois le premier objet mathématique connu et la première pensée scientifique.





La tablette ne contient aucun énoncé. On n'y trouve qu'un carré, ses deux diagonales, ainsi que quelques marques, usuellement désignées comme « clous » et « chevrons ». Ces marques correspondent à des valeurs écrites dans un système de numération sexagésimal babylonien.

La tablette comporte donc trois valeurs correspondant aux trois lignes de nombres :

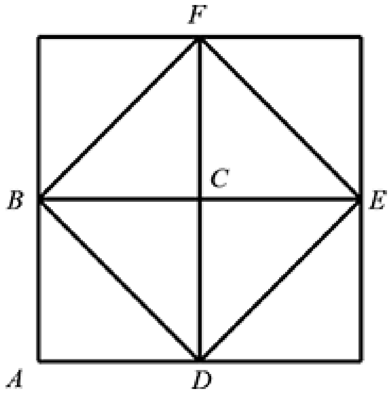
30   1 24 51 10   42 25 35

Maintenant, il faut savoir que $a\ b\ c\ d\ldots$ correspondent dans notre système décimal à $a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3} \ldots$

1. Déterminer la valeur décimale de chacun des trois nombres de la tablette.

2. Écrire un énoncé auquel la tablette donne la réponse.

3. On ignore la manière que les Babyloniens ont employée pour se persuader que, dans un carré, la diagonale est $\sqrt{2}$ fois plus longue que le côté, peut-être en faisant un dessin comme celui-là :



ADCB et BDEF sont des carrés.

Compléter : si $Aire$(ADCB) = 1 alors $Aire$(BDEF) = ……….

Donc BD = ……….

En ce qui concerne le calcul approché de la racine carrée de 2, tout comme pour celui d'autres racines carrées, il semble qu'ils aient eu à leur disposition ce que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de méthode de Héron (ou au moins une variante).

III- La méthode de Héron

A- Encore un peu d'histoire

La méthode de Héron ou **méthode babylonienne** est une méthode d'extraction de racine carrée, c'est-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif.
Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie (vers le 1er siècle après J.-C.), qui l'expose dans le tome I de son ouvrage *Metrica* (*Les métriques*), découvert seulement en 1896 mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne.
Héron expose ainsi sa méthode récursive dans le problème 8 du tome I des *Métriques*. Il détaille initialement une méthode pour calculer l'aire d'un triangle en connaissant ses trois côtés (cf. formule de Héron), en prenant pour exemple un triangle de côtés 7, 8 et 9 unités. Il obtient alors le nombre 720 comme résultat intermédiaire, dont il doit calculer la racine carrée pour aboutir au résultat final. Il propose alors la méthode de calcul suivante :

« Puisque alors les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi. Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 : il en résulte 26 et deux tiers. Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers. De ceux-ci la moitié : il en résulte 26 2' 3'. Le côté approché de 720 sera donc 26 2' 3'. En effet 26 2' 3' par eux-mêmes : il en résulte 720 36', de sorte que la différence est une 36e part d'unité. Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le 36', au lieu de 729, nous placerons les 720 et 36' maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au 36'. »

— Héron d'Alexandrie, *Metrica, tome I, 8*

B- Méthode récursive pour le calcul de la racine carrée d'un réel positif *a*

On cherche $x = \sqrt{a}$, avec a un réel positif.

1. Compléter :

$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = a + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right)$

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right)$.

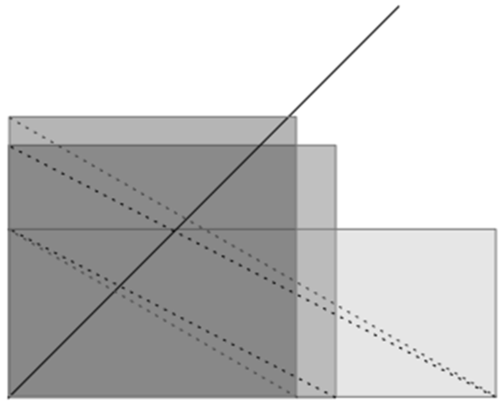
2. **a.** Choisir une valeur de a et calculer quelques termes de la suite (x_n).

b. Que constate-t-on ?

Point de vue géométrique :

Chez les mathématiciens grecs, extraire la racine carrée de a revient à trouver un carré dont l'aire soit a. En prenant un rectangle de côté arbitraire x et de même aire a, il est nécessaire que l'autre côté ait pour longueur $\frac{a}{x}$.
Pour le rendre « moins rectangle », il suffit de considérer un nouveau rectangle dont la longueur est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents soit $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}+x\right)$et dont l'aire reste a.

En réitérant indéfiniment le processus, le rectangle se transforme petit à petit en un carré de même aire a et dont le côté se rapproche de $\sqrt{a}$).
On peut se convaincre facilement du bien-fondé de cette affirmation :



Les rectangles ont même aire. Chaque rectangle a pour longueur la moyenne des dimensions du rectangle précédent.

α. Si x_1 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{a}$, $\frac{a}{x_1}$ est alors une valeur approchée par défaut de $\sqrt{a}$, et inversement.

β. On choisit alors leur moyenne arithmétique x_2 comme nouvelle valeur approchée de $\sqrt{a}$.

γ. En calculant $\frac{a}{x_2}$ puis x_3 puis… on obtient des approximations de plus en plus fines de $\sqrt{a}$.

On dit que la suite (x_n) converge et que sa limite est $\sqrt{a}$.

Point info : on montre en terminale que la suite (x_n) est « convergente » car **décroissante et minorée**.
Sa limite ℓ vérifie alors $\ell \geqslant 0$ car ($x_n > 0$) et $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell}+\ell\right)$ soit $\ell = \sqrt{a}$.

3. Justifier l'assertion **α.**

C- Programmation de la méthode et obtention de valeurs approchées de racines carrées.

1. Programmer un algorithme en Python qui demande de saisir un entier naturel n et un réel a et qui affiche le terme x_n.

2. Programmer un algorithme en Python qui demande de saisir un entier naturel n et un réel a et qui affiche $\sqrt{a}$ et les terme x_1, x_2 … x_n.
On pourra constater qu'à chaque itération, à partir du moment où la première décimale est correcte, le nombre de décimales correctes double au moins. On dit que la convergence de cette suite est **quadratique**, car on peut montrer que l'écart entre x_{n+1} et $\sqrt{a}$ est inférieur au carré de l'écart entre x_n et $\sqrt{a}$.

3. a. Programmer un algorithme en Python qui demande de saisir un entier p et un réel a et qui affiche une valeur approchée à p décimales de $\sqrt{a}$.

b. Donner alors une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 6 décimales.