Fractale végétale

Niveau : Terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme : Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$.
En aval du TD ou DTL « Transformation d'une image ».

Lien avec Les maths au quotidien :
Représentations visuelles. Thème « Fractales ».

Les matrices peuvent être utilisées pour représenter des transformations du plan (rotation, symétrie, homothétie, etc., voir le TD « Transformation d'une image »).
Nous allons utiliser cette représentation matricielle des transformations du plan pour tracer une suite aléatoire de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie A : une fractale en forme d'arbre

Le premier point de cette suite est A_0 (0 ; 0) ; Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (x_n ; y_n) les coordonnées de A_n.
Le point A_n est transformé au hasard en le point A_{n+1} par l'une des trois transformations f_1, f_2 et f_3 suivantes, **de façon équiprobable :**

f_1 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

f_2 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos a_1 & -r\sin a_1 \\ r\sin a_1 & r\cos a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5\,r\cos a_1 \\ c - 0{,}5\,r\sin a_1 \end{pmatrix}$

f_3 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\cos a_2 & -q\sin a_2 \\ q\sin a_2 & q\cos a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5\,q\cos a_2 \\ 0{,}6c - 0{,}5\,q\sin a_2 \end{pmatrix}$

On fixe ici les paramètres $c = 0{,}3$; $r = 0{,}75$; $q = 0{,}85$ et $a_1 = -\dfrac{\pi}{6}$; $a_2 = \dfrac{\pi}{10}$.

1. Écrire les 3 relations matricielles correspondant à f_1, f_2 et f_3 sous forme de systèmes.

2. Ouvrir le fichier Python « arbre » sur IDLE (version supérieure à 3.8).
Aller dans « Options » puis « Show Line Numbers » pour afficher les numéros des lignes.
- **a.** Expliquer les lignes 12, 13, 14 du programme.
- **b.** Compléter la ligne 9 du programme.
- **c.** Compléter les lignes 26, 28 du programme.
- **d.** Expliquer les lignes 32 et 33 du programme.

3. Utiliser le programme Python pour tracer la fractale pour 500, 50 000, puis 500 000 points.

Point info :

On a vu dans le TD « Transformation d'une image » que la matrice d'une rotation (de centre O) et d'angle θ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, la matrice de l'homothétie (de centre O) et de rapport k est $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix} r\cos a_1 & -r\sin a_1 \\ r\sin a_1 & r\cos a_1 \end{pmatrix}$ qui apparait dans la transformation f_2 est la matrice de **la composée de l'homothétie de rapport r et de la rotation d'angle a_1** (toutes deux de centre O).
Cette matrice est **le produit** des matrices $\begin{pmatrix} \cos a_1 & -\sin a_1 \\ \sin a_1 & \cos a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ (vérifier-le !).
Remarque similaire pour la transformation f_3.
L'ajout d'un vecteur colonne dans les transformations (par exemple $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour f_1) correspond à **une translation** (par exemple de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour f_1).

Partie B : la fougère de Barnsley

Le premier point de cette suite est A_0 (0 ; 0) ; Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de A_n.
Le point A_n est transformé au hasard en le point A_{n+1} par l'une des quatre transformations f_1, f_2, f_3 et f_4 suivantes :

f_1 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec une probabilité de 0,01.

f_2 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$, avec une probabilité de 0,85.

f_3 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$, avec une probabilité de 0,07.

f_4 : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}28 \\ 0{,}26 & 0{,}24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$, avec une probabilité de 0,07.

1. Quelles sont les coordonnées possibles du point A_1 ?

2. Modifier le programme de la partie A pour tracer la nouvelle fractale.

Point info :

La suite de points ainsi obtenue forme une fractale appelée **fougère de Barnsley** (obtenue en 1998 par le mathématicien britannique Michael Barnsley)

Remarque : chacune des 4 transformations est responsable de la création d'une partie de la fougère.
f_1 participe à créer la tige. f_2, la plus probable, crée la tige et les feuilles, f_3 et f_4 créent les feuilles de gauche et de droite de la fougère.