

Fonctions de retouche

Niveau : terminale S. Bac Centres étrangers juin 2014.

Lien avec le programme : étude d'une fonction, fonctions usuelles, théorème des valeurs intermédiaires, algorithmique, calcul intégral.

Lien avec Les maths au quotidien : Représentations visuelles.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

$$f(0) = 0 ;$$

$$f(1) = 1 ;$$

f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;

f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous, éclaircie.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous, assombrie.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

- On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.
 - Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
 - Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, en faisant apparaître les pointillés utiles. Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement
- On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x]$.

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

 - Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \frac{e-2-(e-1)x}{1+(e-1)x}$.
 - Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
 - Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-contre, f désigne une fonction de retouche. x désigne la nuance initiale et y la nuance retouchée.
Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

```
c ← 0
Pour k allant de 0 à 100 :
  x ←  $\frac{k}{100}$ 
  y ← f(x)
  E ← |y - x|
  Si E > 0,05, alors
    c ← c + 1
  Fin si
Fin pour
Afficher c
```

Partie C

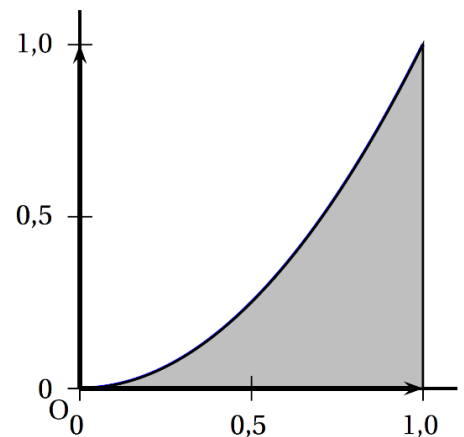
Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire \mathcal{A}_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{x^2-1} \text{ et } f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

1. **a** Calculer \mathcal{A}_{f_1} .
b. Calculer \mathcal{A}_{f_2} .
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



Courbe représentative de la fonction f_1

