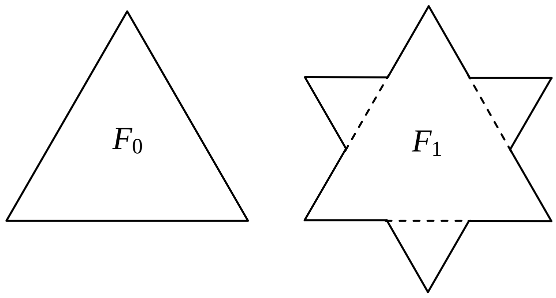
Un beau flocon

Niveau : terminale S en demi-classe, avec le logiciel GeoGebra (éventuellement terminer à la maison).
Lien avec le programme : limite d'une suite géométrique, raisonnement par récurrence.
Prérequis : suite géométrique, formule donnant $1 + q + \ldots + q^n$ (1re S).
Lien avec *Les maths au quotidien* : thème **Les fractales**.

Il est assez difficile de définir exactement la notion de fractale mais on peut dire qu'une courbe ou une surface est *fractale* si sa forme « globale » est identique ou similaire à l'une de ses parties. Autrement dit, en zoomant suffisamment sur une courbe fractale, on retrouve sa forme initiale. On dit, dans ce cas, que la courbe est auto-similaire.

Un des exemples les plus connus de courbe fractale est le **flocon de Von Koch** :
On obtient un flocon de Von Koch en partant d'un triangle équilatéral (figure F_0) puis en partageant indéfiniment chaque segment de la figure en trois segments de même longueur et en remplaçant le segment central par deux côtés du triangle équilatéral construit sur ce segment central. À chaque itération, on obtient une nouvelle figure. Remarquez que l'on obtient des réductions de la figure initiale, à savoir des triangles équilatéraux.



La courbe limite est le **flocon de Von Koch**.

On considère que les côtés du triangle équilatéral F_0 mesurent 1 unité de longueur.
Notons pour $n \in \mathbb{N}$, p_n le périmètre de la figure F_n.
À chaque itération n, l'aire S_n de la figure F_n augmente, puisque l'on construit de nouveaux triangles. Soit pour $n \geqslant 1$, A_n l'aire supplémentaire obtenue à l'itération n, c'est-à-dire que $S_n = S_{n-1} + A_n$. Posons également $A_0 = S_0$.

A. Avec le logiciel GeoGebra

1. Ouvrir une feuille de travail. Afficher une grille « isométrique » et masquer les axes du repère. Construire la figure F_0, puis la figure F_1, puis la figure F_2 (être attentif à la taille de F_0).

2. a. Ouvrir le fichier koch.ggb et visualiser les figures F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

b. À l'aide de considérations géométriques, remplir le tableau suivant :

Figure	Longueur des côtés	Nombre de côtés	Périmètre de la figure p_n	Aire supplémentaire A_n
F_0			$p_0 =$	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (retrouver cette valeur !)
F_1				
F_2				
F_3				
F_4				

c. Que peut-on conjecturer quant à la nature des suites $(p_n)_{n \geqslant 0}$ et $(A_n)_{n \geqslant 1}$?

B. Un algorithme

Pour un entier naturel n non nul donné, écrire un algorithme de construction de la figure F_n à partir de la figure F_0.

C. Un peu de calcul

1. a. Montrer que $(p_n)_{n \geqslant 0}$ et $(A_n)_{n \geqslant 1}$ sont des suites géométriques dont on donnera pour chacune le premier terme et la raison.

b. En déduire p_n et A_n en fonction de n.

c. Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

2. a. Montrer que, pour n entier naturel, $S_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$.

b. À l'aide de cette formule, déterminer l'aire S_n de la figure F_n en fonction de n.

c. Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

3. Quelles remarques peut-on faire à propos du périmètre et de l'aire du flocon de Von Koch ?

AIDE GEOGEBRA

Tâche à accomplir	Aide
Ajuster la fenêtre d'affichage (déplacer, zoomer…).	Icône « **Déplacer Graphique** » du menu déroulant.
Changer la grille.	Clic droit sur la feuille de travail, puis propriétés.
Créer un polygone régulier.	Regarder une des icônes du menu déroulant.