ESPÉRANCE DE VIE

D'après un article de **François Sauvageot**, mathématicien, enseignant, chercheur.
« **Espérance de vie** » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2008. à l'adresse suivante : http://images.math.cnrs.fr/Esperance-de-vie.html

Tous les calculs de ce document ont été réalisés sur le fichier Excel « espérance » joint.

Voici la définition que donne l'INSEE de l'espérance de vie à la naissance :

Elle représente la durée de vie moyenne - autrement dit l'âge moyen au décès - d'une génération fictive soumise aux conditions de mortalité de l'année. Elle caractérise la mortalité indépendamment de la structure par âge.
Elle est un cas particulier de l'espérance de vie à l'âge *x*. Cette espérance représente, pour une année donnée, l'âge moyen au décès des individus d'une génération fictive d'âge *x* qui auraient, à chaque âge, la probabilité de décéder observée cette année-là au même âge.
Autrement dit, elle est le nombre moyen d'années restant à vivre au-delà de cet âge *x* (ou durée de survie moyenne à l'âge *x*), dans les conditions de mortalité par âge de l'année considérée.

Essayons d'expliquer cette obscure définition :

Déjà, le mot espérance est pris ici au sens mathématique (le verbe *esperar* en espagnol signifie *attendre*). Il s'agit donc d'une valeur « attendue ».
Nous allons étudier l'espérance de vie d'un bébé venant de naître en 2010. Pour calculer son espérance de vie, nous allons utiliser des données statistiques sur la population française en 2010.

Une première idée serait de calculer l'âge moyen de décès en France en 2010 :
Le tableau suivant donne le nombre de personnes décédées en France en 2010 en fonction de l'âge de décès :

Âge n	0	1	2	…	10	…	50	…	80	…	99	…
Nombre de décès d_n	2 457	444	175	…	53	…	2 790		15 740		4 373	…

Le nombre total d de décès en 2010 est la somme de tous les nombres de la seconde ligne. Après calcul, $d = 540\ 469$.

Calculons l'âge moyen de décès en France en 2010 :

$$\frac{0\times d_0 + 1\times d_1 + 2\times d_2 + \cdots}{d} = \frac{0\times 2\ 457 + 1\times 444 + \cdots + 10\times 53 + \cdots 50\times 2\ 790 + \cdots + 80\times 15\ 740 + \cdots + 99\times 4\ 373 + \cdots}{540\ 469}$$

$$\approx 77{,}2$$

L'âge moyen de décès en France en 2010 est d'environ 77,2 ans.

Cette moyenne est très sensible à la structure de la population : une population comportant beaucoup de jeunes pourra avoir un âge moyen de décès plus bas que celui d'une population dans laquelle ils sont peu nombreux alors que les individus de la première vivent en général plus longtemps que ceux de la seconde.
Il est donc difficile d'utiliser l'âge moyen de décès pour comparer deux populations différentes, ne serait-ce que la population de la France à deux époques différentes ou deux sous-populations de la population française.

Les statisticiens et démographes ont inventé un indicateur qui tient compte de la pyramide des âges dans son calcul.
Pour cela, dans le tableau précédent, on rajoute pour chaque âge n la donnée du nombre de personnes q_n ayant cet âge dans la population.

Âge n	0	1	2	…	10	…	50	…	99	…
Nombre de personnes q_n	827 927	817 050	794 570		832 847		881 545		10 685	
Nombre de décès d_n	2 457	444	175	…	53	…	2 790		4 373	…

Le taux de mortalité par âge est la proportion p_n d'individus décédés parmi celle d'âge n : $p_n = \frac{d_n}{q_n}$.

On en déduit que le taux de survie par âge est $s_n = 1 - p_n$.
La proportion s_n représente donc la proportion des individus ayant l'âge n au début de l'année et qui fêtent leur $(n+1)^e$ anniversaire pendant l'année.

Âge n	0	1	2	…	10	…	50	…	99	…
Taux de mortalité p_n	0,30 %	0,05 %	0,02 %		0,01 %		0,32 %		40,93 %	
Taux de survie s_n	99,70 %	99,95 %	99,98 %	…	99,99 %	…	99,68 %		59,07 %	…

On construit maintenant une population fictive qui évolue ainsi :
- entre 0 et 1 an, une proportion p_0 décède ;
- parmi les survivants, une proportion p_1 décède entre 1 et 2 ans ;
- parmi les survivants, une proportion p_2 décède entre 2 et 3 ans ;
- et ainsi de suite ...

Autrement dit, on fait comme si les taux de mortalité (ou de survie) par âge restaient identiques à ceux de cette année tout au long de la vie du bébé qui vient de naître en 2010.
Pour notre exemple, il y a environ 0,30 % de personnes qui meurent avant d'atteindre 1 an. Il y en donc environ 99,61 % qui mourront âgés de plus de 1 an. Parmi celles-ci environ 0,05 % n'atteindront pas 2 ans. Autrement dit une proportion d'environ $0{,}9970 \times 0{,}0005$ mourront à 2 ans, soit presque 0,05 %. En fait les valeurs exactes sont 99,7032347054752 % pour le taux de mortalité entre 0 et 1 ans, et 0,0543418395447035 % pour le taux de mortalité à 1 ans (voir fichier Excel).

Pour connaître la proportion d'enfants mourant à 5 ans, il faut connaître la proportion de personnes ayant passé les 5 premières années. Cela représente : $s_0 \times s_1 \times s_2 \times s_3 \times s_4$ soit près de 99,60 % de la population française. Au sein de ces enfants de 5 ans, le taux de mortalité dans l'année est d'environ 0,00867 %, de sorte qu'au sein de l'ensemble de la population cela représente environ 0,00864%.

En résumé, dans notre population fictive, la proportion de personnes arrivant à l'âge n et la proportion de décès à cet âge est donnée par le tableau suivant :

Âge	0	1	2	3	...	N
Proportion arrivant jusqu'à cet âge	1	s_0	$s_0 \times s_1$	$s_0 \times s_1 \times s_2$	...	$s_0 \times s_1 \times \ldots \times s_{n-1}$
Proportion de décès à cet âge	p_0	$s_0 \times p_1$	$s_0 \times s_1 \times p_2$	$s_0 \times s_1 \times s_2 \times p_3$	...	$s_0 \times s_1 \times \ldots \times s_{n-1} \times p_n$

L'espérance de vie, c'est la moyenne de durée de vie basée sur toutes ces proportions :
$0 \times p_0 + 1 \times s_0 \times p_1 + 2 \times s_0 \times s_1 \times p_2 + \ldots + n \times s_0 \times s_1 \times \ldots \times s_{n-1} \times p_n + \ldots$

Pour la France, on obtient le tableau suivant :

Âge *n*	0	1	2	…	10	…	50	…	99	…
Proportion arrivant jusqu'à cet âge (en %)	100 %	99,70 %	99,65 %		99,56 %		96,21 %		2,37 %	
Proportion de décès à cet âge (en %)	0,30 %	0,05 %	0,02 %	…	0,01 %	…	0,30 %		0,97 %	…

En France, l'espérance de vie en 2010 est d'environ 80,5 ans, tous sexes confondus. En fait, on peut distinguer entre hommes et femmes : elle est d'environ 77,7 ans pour les hommes et de 83,2 ans pour les femmes (voir les feuilles 1 et 2 du fichier Excel).

Remarquons également que dans notre population fictive 50 % de la population dépassent 84 ans !... et 1,40 % sont centenaires.

Pour terminer, citons encore François Sauvageot :

L'espérance de vie est un indice conjoncturel, ce n'est pas plus la prévision de l'âge moyen des décès de l'année que la durée de vie de ceux et celles qui viennent de naître !

La confusion est souvent faite, ainsi dans Libération du lundi 31 décembre 2007 on pouvait lire :

50 ans d'espérance de vie... *On meurt jeune dans la rue. Pour les 99 morts recensés entre mai et novembre 2007, le Collectif des morts de la rue a procédé à une analyse de ces décès par tranche d'âge : seuls 6 victimes avaient plus de 65 ans. Chez les autres : 19 avaient moins de 46 ans, 22 entre 46 et 50 ans, et 22 entre 56 et 65 ans. Moyenne d'âge pour l'ensemble : 50 ans, dans un pays où l'espérance de vie moyenne est de plus de 80 ans (77,2 ans pour les hommes et 84,1 ans pour les femmes). « Nousf sommes confrontés chaque jour à la mort prématurée des personnes de la rue », écrit Christophe Louis dans sa lettre. Et leur espérance de vie de trente ans inférieure à celle de l'ensemble des Français.*

Avec la même argumentation, on pourrait aussi dire que dans les maternités, sur les terrains de sport, sur le lieu de travail ... l'âge moyen des décès est également largement inférieur à l'espérance de vie. Que faudra-t-il en conclure ? Qu'il y a peu de vieillards qui meurent dans les maternités ?!
L'espérance de vie (à la naissance) n'est pas l'âge moyen de décès au moment où elle est calculée.
Le rapprochement de ces deux notions n'est pas approprié pour confirmer cette évidence : les sans-abris meurent plus jeunes que les bien-logés. La proposition est juste, alors même que la démonstration proposée est fallacieuse.
Argumenter de la sorte pourrait faire croire que cette évidence n'en est pas une. Pour mener correctement cette étude, on a plusieurs angles d'attaque : comparer le taux de décès des SDF avec celui attendu d'une population de structure comparable (âge, sexe ...) ou étudier l'espérance de vie (survie…) quand on devient sans-abri.
Comme toujours avec un indicateur, il faut rester sur ses gardes : il répond à une question et il faut garder à l'esprit cette question afin ne pas user de cet indicateur pour répondre à une autre question. Ce n'est en particulier pas un but en soi d'améliorer l'indicateur.
Améliorer l'espérance de vie est en fait plus facile en faisant diminuer le taux de mortalité chez les enfants que chez les personnes âgées, mais une politique de santé ne saurait se réduire à ce constat !