

DÉTALER COMME UN LAPIN

Niveau : devoir en temps libre, terminale S.

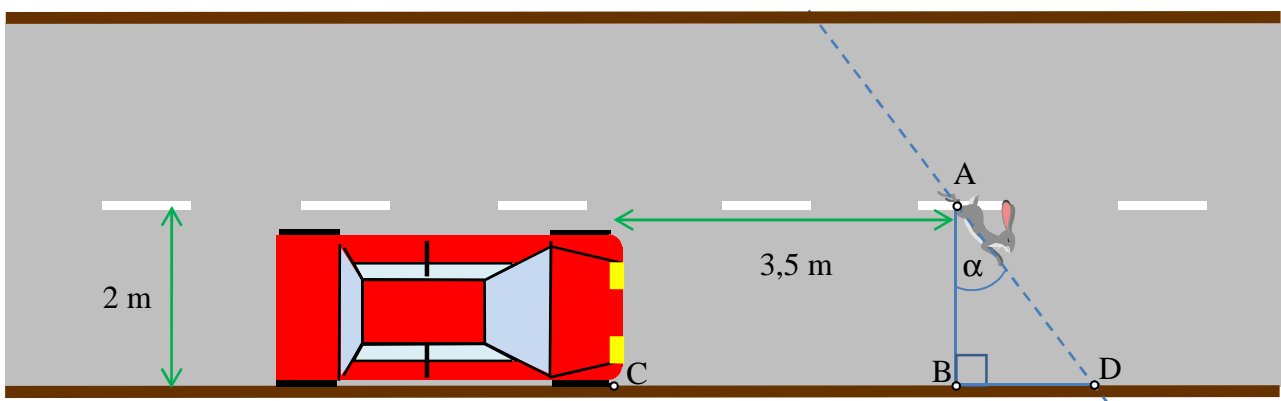
Lien avec le programme : fonctions trigonométriques, étude de fonction, théorème des valeurs intermédiaires, problème en lien avec une autre discipline (la physique).

Lien avec *Les maths au quotidien* : transport, cuisine. 😊

Un automobiliste roule tranquillement sur une route bien droite de campagne, à la vitesse de 60 km/h. Tout-à-coup un lapin traverse la route.

Le lapin effectue la traversée de la route en ligne droite à 30 km/h. Son arrière train vient juste de franchir la ligne médiane lorsque la voiture, qui roule le long du bord de la route, n'est plus qu'à 3,5 mètres de lui.

Le but de l'exercice est de déterminer si le lapin peut ne pas finir en civet.



Le lapin part du point A en direction de D. On désigne par α une mesure en radians de l'angle \widehat{BAD} , avec $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. La route mesure 4 mètres de largeur.

1. Montrer que $BD = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$, puis déterminer les distances AD et CD en fonction de α .
2. Montrer que le temps t_1 mis par la voiture pour parcourir la distance CD, en heures, est égale à $\frac{3,5}{60\,000} + \frac{2 \sin \alpha}{60\,000 \cos \alpha}$ puis déterminer le temps t_2 , en heures, mis par le lapin pour parcourir la distance AD.
3. f est la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(\alpha) = \frac{7}{4} + \frac{\sin \alpha - 2}{\cos \alpha}$
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage de la voiture si et seulement si $f(\alpha) > 0$.
4. Exprimer $f'(\alpha)$ en fonction de α et démontrer que $f'(\alpha)$ est du signe de $1 - 2 \sin \alpha$.
5. Dresser le tableau de variations de f (on calculera en particulier la limite de f en $\frac{\pi}{2}$).
6. Montrer que l'équation $f(\alpha) = 0$ admet deux solutions a et b dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $a < b$. Donner une valeur approchée par excès de a et une valeur approchée par défaut de b .
7. Dresser le tableau de signe de f .
8. Conclure.