

DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE ET MÉTHODE D'EULER

Niveau : terminale générale, spécialité ou Maths complémentaires.

Lien avec le programme : méthode d'Euler, équation différentielle $y' = a y$. Préliminaires en classe entière ou à la maison, avant le TP.

Lien avec Les maths au quotidien : Santé / Scintigraphie.

I. Principe

On ne connaît pas les expressions explicites de certaines fonctions ; cependant en ayant des informations sur sa fonction dérivée et une condition initiale, on peut approcher leurs courbes représentatives.

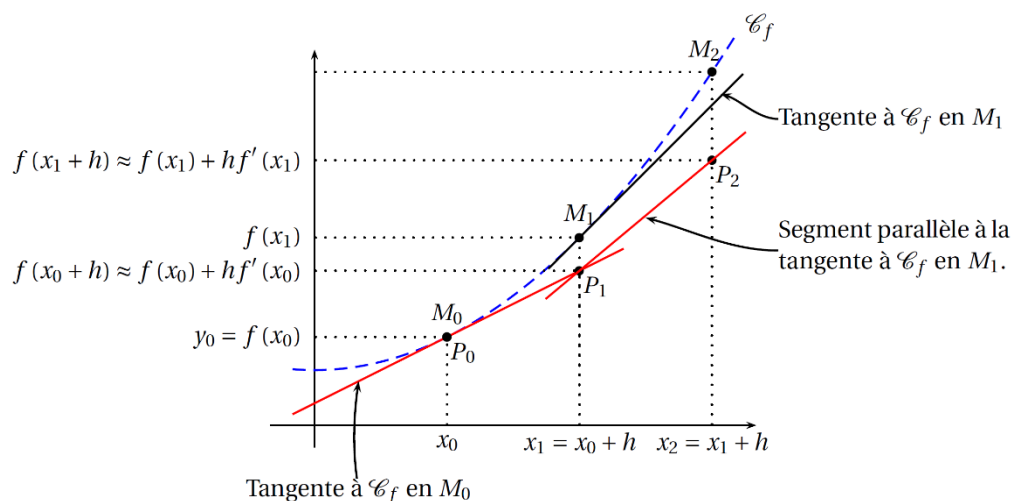
La méthode utilisée s'appelle la **méthode d'Euler**

Elle s'appuie sur la formule d'approximation affine : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h f'(x_0)$ (avec h proche de 0).

La méthode d'Euler permet en N étapes de construire une suite de points $P_n(x_n; y_n)$, pour n allant de 0 à N , tels que la réunion des segments $[P_n P_{n+1}]$ forme une courbe proche de la courbe représentative de la fonction f .

On obtient la suite de points P_n en définissant, pour n entier naturel $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h f'(x_n) \end{cases}$ avec x_0 et y_0 donnés au départ tels que $f(x_0) = y_0$.

h est appelé le **pas** et par exemple pour obtenir une construction en N étapes on peut choisir $h = \frac{1}{N}$ ou $h = -\frac{1}{N}$



Voyons un exemple de mise en œuvre sur un exemple que l'on sait résoudre explicitement, de façon à évaluer la performance.

Jean-Franck a passé une scintigraphie osseuse. On lui a injecté par voie intraveineuse une dose de technétium 99m ayant une activité de 740 mégabecquerels (MBq). On prend cet instant pour origine du temps. Le technétium sera fixé deux heures après l'injection. On appelle $f(t)$ l'activité, en MBq de l'isotope au cours du temps t , exprimé en heures. Comme pour tout isotope radioactif, on sait que f est solution d'une équation différentielle $y' = -\lambda y$ où λ est la constante de désintégration du technétium 99m, valant $-0,1154$.

Ici $t_0 = 0$ et $y_0 = f(t_0)$.

A. Préliminaires.

1. Quelle est la valeur de $f(t_0)$?
2. À l'aide des informations données, écrire $f(t)$ en fonction de t .
3. Donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99m dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.

- On a $t_{n+1} = t_n + h$. Quelle est la nature de la suite (t_n) ? En déduire t_n en fonction de h et n .
- $f(t_n)$ étant identifié à y_n , montrer que pour tout n entier naturel, $y_{n+1} = (1 - \lambda h) y_n$.
Quelle est la nature de la suite (y_n) ? En déduire y_n en fonction de h et n .

B. Méthode d'Euler sur l'intervalle [0 ; 10] avec un pas de 0,5.

- On choisit un pas de 0,5. Dans le tableur, recopier dans la colonne A les valeurs de n de 0 à 20, dans la colonne B les valeurs de t_n correspondantes.
- Dans la colonne C, écrire les valeurs de y_n correspondant aux t_n .
- Tracer avec le tableur la ligne polygonale formée avec les points $P_n(t_n ; y_n)$.
- Avec cette méthode, donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99m dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.

C. Méthode d'Euler sur l'intervalle [0 ; 10] avec un pas de 0,1.

- On choisit maintenant un pas de 0,1. Refaire les mêmes questions que pour un pas de 0,5. On utilisera la même feuille de calcul que précédemment pour conserver les données (travailler dans les colonnes D et E).
- Avec cette méthode, donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99m dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.

D. Comparaison.

- Comparer les résultats obtenus aux questions A. 3., B. 4., C. 2.
- Avec le tableur, calculer dans la colonne juste à droite de celles des 101 valeurs de y_n dernièrement calculées les valeurs de $f(t_n)$ (on prendra l'expression de $f(t)$ de la question A. 2.).
- Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f et les deux courbes polygonales obtenues avec des pas 0,5 et 0,1 (on pourra agrandir la fenêtre du graphique, modifier la taille du trait (1 point) et des marqueurs (2 points) puis zoomer sur le graphique...
Remarques ?

AIDE EXCEL

tâche	aide	exemple
Utiliser la fonction exponentielle.	Fonction EXP dans Excel.	
Pour copier rapidement une liste de nombres avec un pas constant.	On copie les deux premiers nombres et on les sélectionne puis on étend avec la poignée de recopie.	
Pour recopier une formule.	On copie une première fois la formule (symbole = crucial !) puis on l'étend.	on tape en B8 : = 1,2*B7
Pour tracer un graphique, où une colonne (ou des colonnes) est (sont) fonction(s) d'une autre.	1. Sélectionner les plages qui vous intéressent. Aller sur l'icône puis	
Pour ajouter une courbe à un graphique.	« Cliquer droit » sur le graphique puis sur l'icône puis sur l'icône à gauche.	
Dans un graphique, modifier la taille du trait ou des marqueurs.	Cliquer gauche sur le nom de la série dans la légende, puis cliquer gauche sur ce nom, puis « Mise en forme des séries de données... ».	