

DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE ET MÉTHODE D'EULER

Niveau : Terminale S, méthode d'Euler, équation différentielle $y' = a y$. TP en demi-classe, avec un tableur. Préliminaires en classe entière ou à la maison, avant le TP.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Santé / Scintigraphie.

Propriété utilisée : la formule d'approximation affine.

Soit f fonction dérivable sur un intervalle I , soit t_0 un réel de I , $f(t_0 + h) \approx f(t_0) + hf'(t_0)$ (h « proche » de 0).

La méthode d'Euler permet en N étapes de construire une suite de points $P_n(t_n; y_n)$, pour n allant de 0 à N , tels que la réunion des segments $[P_n P_{n+1}]$ forme une courbe proche de la courbe représentative de la fonction f .

En choisissant $h = \frac{1}{N}$ (ou $-\frac{1}{N}$), on obtient la suite de points P_n définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hf'(t_n) \end{cases} \text{ avec } t_0 \text{ et } y_0 \text{ donnés au départ.}$$

Jean-Franck a passé une scintigraphie osseuse. On lui a injecté par voie intraveineuse une dose de technétium 99 ayant une activité de 740 mégabecquerels (MBq). On prend cet instant pour origine du temps. Le technétium sera fixé deux heures après l'injection. On appelle $f(t)$ l'activité, en MBq de l'isotope au cours du temps t , exprimé en heures. Comme pour tout isotope radioactif, on sait que f est solution d'une équation différentielle $y' = -\lambda y$ où λ est la constante de désintégration du technétium 99. La demi-vie du technétium 99 est de 6 heures.

Ici $t_0 = 0$ et $y_0 = f(t_0)$.

A. Préliminaires.

1. Quelle est la valeur de $f(t_0)$?
2. À l'aide des informations données, écrire $f(t)$ en fonction de t (λ à 10^{-4} près).
3. Donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99 dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.
4. On a $t_{n+1} = t_n + h$. Quelle est la nature de la suite (t_n) ? En déduire t_n en fonction de h et n .
5. $f(t_n)$ étant identifié à y_n , montrer que pour tout n entier naturel, $y_{n+1} = (1 - \lambda h) y_n$. Quelle est la nature de la suite (y_n) ? En déduire y_n en fonction de h et n .

B. Méthode d'Euler sur l'intervalle $[0 ; 10]$ avec un pas de 0,5.

1. On choisit un pas de 0,5. Dans le tableur, recopier dans la colonne A les valeurs de n de 0 à 20, dans la colonne B les valeurs de t_n correspondantes.
2. Dans la colonne C, écrire les valeurs de y_n correspondant aux t_n .
3. Tracer avec le tableur la ligne polygonale formée avec les points $P_n(t_n; y_n)$.
4. Avec cette méthode, donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99 dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.

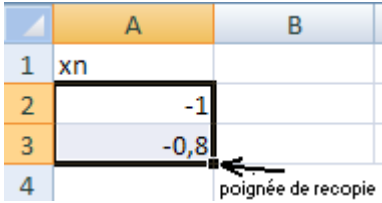
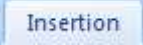
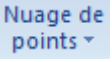
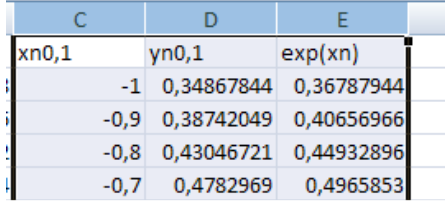


C. Méthode d'Euler sur l'intervalle $[0 ; 10]$ avec un pas de 0,1.

1. On choisit maintenant un pas de 0,1. Refaire les mêmes questions que pour un pas de 0,5. On utilisera la même feuille de calcul que précédemment pour conserver les données (travailler dans les colonnes D et E).
2. Avec cette méthode, donner une valeur approchée de l'activité du technétium 99 dans le corps de Jean-Franck deux heures après l'injection ; dix heures après l'injection.

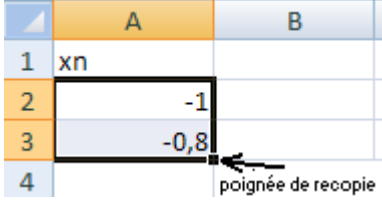

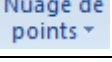
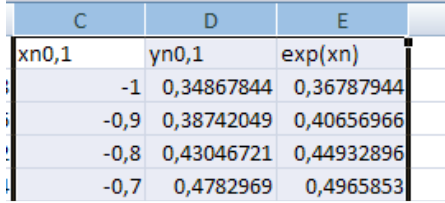

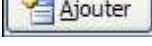
D. Comparaison.

1. Comparer les résultats obtenus aux questions A. 3., B. 4., C. 2.
2. Avec le tableur, calculer dans la colonne juste à droite de celles des 101 valeurs de y_n dernièrement calculées les valeurs de $f(t_n)$ (on prendra l'expression de $f(t)$ de la question A. 2.).
3. Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f et les deux courbes polygonales obtenues avec des pas 0,5 et 0,1 (on pourra agrandir la fenêtre du graphique, modifier la taille du trait (1 point) et des marqueurs (2 points) puis zoomer sur le graphique...
Remarques ?

AIDE EXCEL

tâche	aide	exemple
Utiliser la fonction exponentielle.	Fonction EXP dans Excel.	
Pour copier rapidement une liste de nombres avec un pas constant.	On copie les deux premiers nombres et on les sélectionne puis on étend avec la poignée de recopie.	
Pour recopier une formule.	On copie une première fois la formule (symbole = crucial !) puis on l'étend.	on tape en B8 : = 1,2*B7
Pour tracer un graphique, où une colonne (ou des colonnes) est (sont) fonction(s) d'une autre.	<p>1. Sélectionner les plages qui vous intéressent.</p> <p>Aller sur l'icône  puis </p>	
Pour ajouter une courbe à un graphique.	<p>« Cliquer droit » sur le graphique puis sur l'icône  Sélectionner des données... puis sur l'icône  à gauche.</p>	
Dans un graphique, modifier la taille du trait ou des marqueurs.	Cliquer gauche sur le nom de la série dans la légende, puis cliquer gauche sur ce nom, puis « Mise en forme des séries de données... ».	

AIDE EXCEL

tâche	aide	exemple
Utiliser la fonction exponentielle.	Fonction EXP dans Excel.	
Pour copier rapidement une liste de nombres avec un pas constant.	On copie les deux premiers nombres et on les sélectionne puis on étend avec la poignée de recopie.	
Pour recopier une formule.	On copie une première fois la formule (symbole = crucial !) puis on l'étend.	on tape en B8 : = 1,2*B7
Pour tracer un graphique, où une colonne (ou des colonnes) est (sont) fonction(s) d'une autre.	<p>1. Sélectionner les plages qui vous intéressent.</p> <p>Aller sur l'icône  puis </p>	
Pour ajouter une courbe à un graphique.	<p>« Cliquer droit » sur le graphique puis sur l'icône  Sélectionner des données... puis sur l'icône  à gauche.</p>	
Dans un graphique, modifier la taille du trait ou des marqueurs.	Cliquer gauche sur le nom de la série dans la légende, puis cliquer gauche sur ce nom, puis « Mise en forme des séries de données... ».	