

OPTIMISATION D'UN DÉPISTAGE

Niveau : devoir en temps libre, 1^{re} L, ES, S.

Lien avec le programme : variable aléatoire discrète, loi binomiale...

Lien avec *Les maths au quotidien* : Santé.

Lors du dépistage d'une certaine maladie chez les individus d'une sous-population, on procède à un prélèvement de sang.

Supposons que nous connaissions la fréquence de la maladie dans la population entière, ici 1 %.

Chaque personne est malade indépendamment des autres.

Pour effectuer ce dépistage, on propose les deux stratégies suivantes :

Stratégie 1 : on teste chaque personne individuellement.

Stratégie 2 : on divise la sous-population en groupes de n personnes.

Ensuite, par groupe, on mélange les prélèvements sanguins des n personnes et on effectue le test. Si on détecte la maladie dans le mélange, alors on refait un test sanguin pour chacune des n personnes.



A. Comparaison des deux stratégies

On analyse le sang de n personnes. Dans cette partie, on écrira tous les résultats en fonction de n .

1. Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de n personnes, associe le nombre de personnes atteintes de la maladie.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne soit atteinte de la maladie ?
2. On regroupe le sang de ces n personnes, puis on procède à l'analyse de sang du mélange. Soit Y la variable aléatoire qui associe à chaque groupe de n personnes le nombre d'analyses de sang effectuées.
 - a. Quelle est la probabilité de procéder à $n + 1$ analyses de sang au total ?
 - b. Donner la loi de probabilité de Y .
 - c. Calculer l'espérance mathématique de Y .
 - d. En déduire que, en choisissant la stratégie 2 au lieu de la stratégie 1, l'économie moyenne par personne du nombre de tests réalisés est égale à $0,99^n - \frac{1}{n}$.

B. Optimisation des regroupements.

À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, déterminer le nombre d'analyses que l'on s'attend à économiser en choisissant la stratégie 2 au lieu de la stratégie 1, dans le cas où la sous-population étudiée comporte 110 000 personnes.

Point info

Cette démarche a été utilisée initialement par R. Dorfman, durant la Seconde Guerre Mondiale, dans un programme commun avec l'United States Public Health Service et le Selective Service System, afin de réformer les futurs appelés du contingent ayant la syphilis. Le taux de syphilis en Amérique du nord était de l'ordre de 1 % à 2 % dans les années 1940 (de l'ordre de 5 à 20 pour 100 000 en 1990).

De nombreuses généralisations de cette méthode, notamment pour le dépistage du VIH ou bien d'autres maladies sexuellement transmissibles ont ensuite été étudiées.