3.3. Arbres des possibles

Les arbres décrivant de façon exhaustive les issues d'une expérience ont pu être abordés en classe de troisième ; on peut consolider cette pratique pour aider les élèves à se construire des images mentales fiables et être plus assurés dans les modélisations et les calculs.

Ces arbres aident au dénombrement et sont des supports de raisonnement. Il n'est pas toujours nécessaire ni matériellement possible d'en représenter toutes les branches. On peut développer les capacités d'abstraction des élèves en utilisant des pointillés dans leur construction.

Exemple : probabilité d'avoir la même date anniversaire[14]
En regardant les dates anniversaires des élèves dans les classes du lycée, on peut être surpris du nombre de classes dans lesquelles deux élèves fêtent leur anniversaire le même jour.

Ce résultat étonnant peut inciter à faire un calcul de probabilité.

On pourra proposer de commencer par un exemple plus simple :

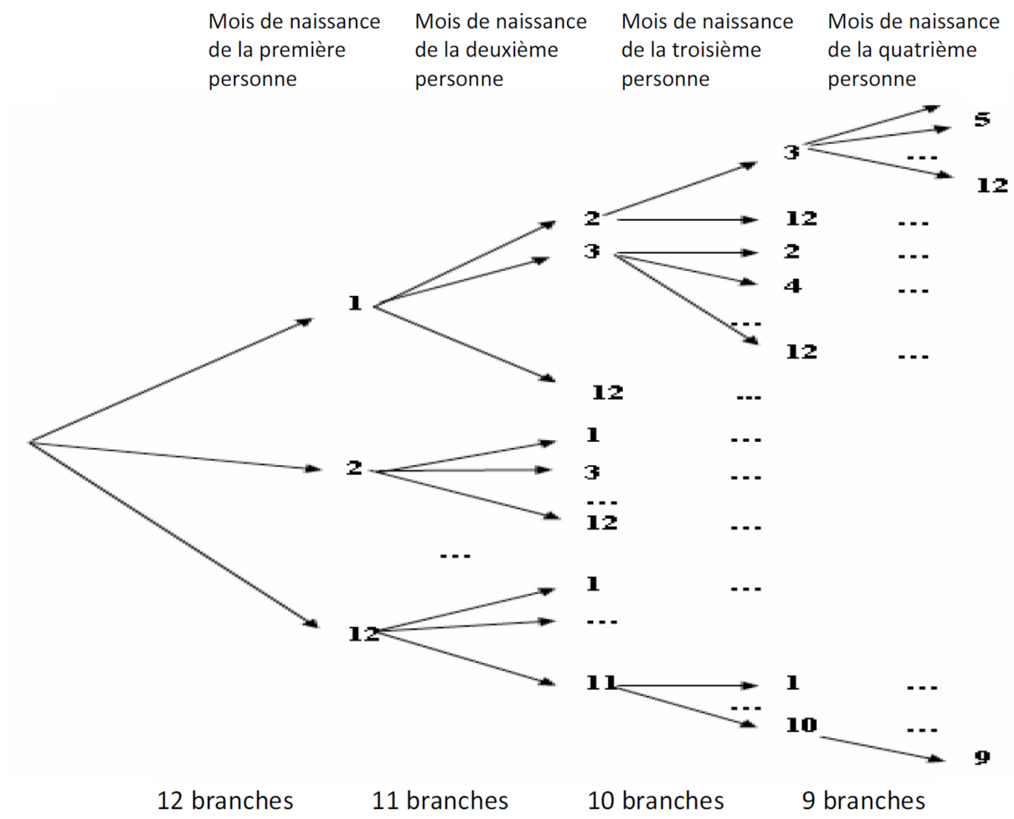
« Dans un groupe de quatre personnes prises au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même mois ? On suppose que, pour chaque personne, tous les mois d'anniversaire sont équiprobables et on les numérote de 1 à 12. ».

On peut reformuler ce problème en assimilant l'expérience à un tirage aléatoire dans une urne : « une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12, on effectue au hasard et avec remise quatre tirages successifs, et l'on note les numéros obtenus, dans l'ordre d'apparition. Chaque numéro tiré correspond au mois d'anniversaire d'une des personnes ».

On peut compter le nombre total des issues avec un arbre comportant des pointillés.

Ensuite on peut rechercher le nombre d'éléments de l'événement étudié, montrer la difficulté que l'on rencontre pour décrire et compter directement les cas favorables, puis faire réfléchir à l'intérêt et à l'énoncé de l'événement contraire (négation de "au moins…").

Illustration de l'arbre des possibles de l'événement contraire:



Pour bien s'assurer de la compréhension de l'arbre, on peut suivre un trajet de la racine à une extrémité de branche et demander aux élèves d'interpréter le résultat par une phrase.

On trouve au total $12\times 11\times 10\times 9 = 11880$ issues possibles. Ce qui donne comme probabilité de l'événement contraire : $\frac{12\times 11\times 10\times 9}{12^4}$, soit environ 0,43 ; d'où la probabilité cherchée (environ 0,57). On peut ensuite adapter ces calculs de probabilité pour un groupe de cinq, puis six personnes[15].

Retour au problème initial : le même raisonnement, immédiatement transposé, permet de résoudre la situation des mêmes dates anniversaires et de rechercher la taille du groupe de personnes pour avoir une probabilité supérieure à 0,8 qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire à la même date.

Utilisation d'un algorithme

Si n désigne le nombre de personnes du groupe, il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de n le nombre $q=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-(n-1))}{365^n}$ est inférieur à 0,2, avec $q=1-p$.

En remarquant que q peut s'écrire comme une répétition de multiplications : $q=\frac{365-0}{365}\times\frac{365-1}{365}\times\frac{365-2}{365}\times\cdots\times\frac{365-(n-1)}{365}$, on peut élaborer un algorithme de calcul de ce nombre selon la valeur de n (algorithme 1), puis par essais successifs, déterminer la première valeur de n qui répond à la question[16].

Algorithme 1	Algorithme 2

Variables
    n, i entiers et q réel
Entrées
    Saisir n
Initialisations
    q prend la valeur 1
Traitement
    Pour i variant de 1 à $n-1$
    q prend la valeur $q\times\frac{365-i}{365}$
Sorties
    Afficher $1-q$
	Variables
	    i entier, p et q réels
	Entrées
	    Saisir p
	Initialisations
	    q prend la valeur 1, i prend la valeur 0
	Traitement
	    Tant que q est supérieur à $1-p$
	    q prend la valeur $q\times\frac{365-i}{365}$
	    i prend la valeur $i+1$
	    Fin du Tant que
	Sorties
	    Afficher i

On peut aussi utiliser un algorithme avec boucle et condition d'arrêt (algorithme 2) pour éviter le tâtonnement et répondre rapidement à cette question ou à une question du type : déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle p est supérieur à 0,99, ou à 0,999, et observer l'évolution de n.

Le calcul précédent pourrait également être réalisé à l'aide d'un tableur.

---

15 Réponses: 0,62 et 0,78.

16 Pour $n = 35$, on trouve $p\approx 0{,}814$, alors que pour $n = 34$ on a $p\approx 0{,}795$.

2 / Coïncidence de date d'anniversaire dans une classe

Dans la vie courante certaines coïncidences apparaissent « extraordinaires » (comme rencontrer par hasard quelqu'un de connu à des centaines de kilomètres de chez soi). Malheureusement bien souvent ces coïncidences ne se prêtent pas facilement à une modélisation qui permettrait un calcul de probabilité ou une simulation.

Le problème évoqué dans ce paragraphe ne pose pas de grandes difficultés de modélisation; pour autant, le résultat s'avèrera sans doute étonnant pour de nombreux élèves.

Sa mise en place algorithmique peut être l'occasion de travailler des questions proches de celles des tris qui font souvent intervenir deux boucles imbriquées.

Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves, il y ait au moins deux élèves qui partagent la même date d'anniversaire ?

Pour effectuer une simulation, il s'agit dans un premier temps de tirer les 30 dates d'anniversaires au sort (parmi 365 jours, en supposant les dates d'anniversaire uniformément réparties sur l'année civile); il faudra ensuite chercher si deux dates coïncident.

Les dates sont mémorisées dans un tableau. Comme c'est souvent l'usage, on note entre crochets l'indice du tableau. Dans l'exemple, on considère que les indices du tableau commencent à 0.

Algorithme 4

Variables

dates : tableau des trente jours d'anniversaire
trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident.
k, p: deux compteurs de boucles.

Initialisation

Pour k **de** 0 **à** 29
  dates[k] **prend une valeur** entière aléatoire comprise entre 1 et 365 inclus

trouvé **prend la valeur** faux

Traitement

Pour k **de** 0 **à** 28
  Pour p **de** k+1 **à** 29
    Si dates[k] = dates[p] **alors**
      trouvé **prend la valeur vrai**

Sortie

Affiche trouvé

Si le tirage au sort des dates se fait aisément sur tableur, il n'en va pas de même de la recherche de dates identiques (du fait des deux boucles).

Traduction SCILAB :

```
dates=floor(rand(30,1)*365+1);
trouve=%F;
for k=1:29
  for p=k+1:30
    if (dates(p)==dates(k))
      trouve=%T;
    end;
  end;
end;
if (trouve)
  disp("Deux personnes ont même
     anniversaire");
else
  disp("Pas deux anniversaires
     communs");
end;
```

Traduction SCILAB (1000 expériences) :

```
N=0;
for i=1:1000
  dates=floor(rand(30,1)*365+1);
  trouve=%F;
  for k=1:29
    for p=k+1:30
      if (dates(p)==dates(k))
        trouve=%T;
      end;
    end;
  end;
  if (trouve)
    N=N+1;
  end;
end;
disp("Il y a "+string(N)+" coïncidences");
```