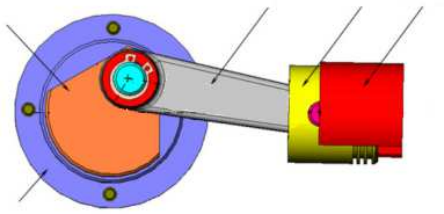
Système bielle-manivelle

Niveau : terminale S.

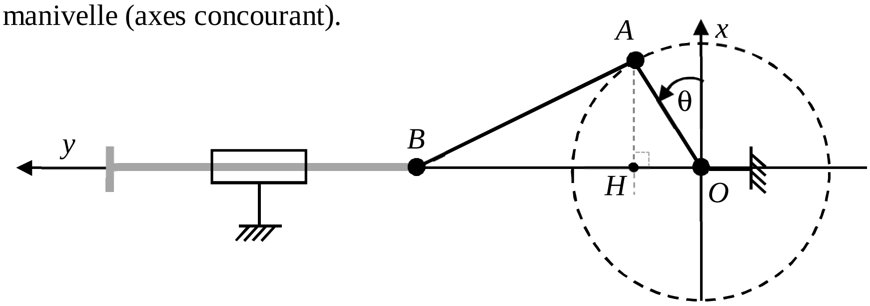
Lien avec le programme : fonctions trigonométriques, étude de fonction, dérivée de u^2, de $\sqrt{u}$, utilisation d'un logiciel de calcul formel, problème en lien avec une autre discipline (Sciences de l'ingénieur, Physique).

Lien avec Les maths au quotidien : Transport.



Le **système bielle-manivelle** est un système mécanique qui tire son nom des deux pièces mécaniques qui le caractérisent : la bielle et la manivelle. Ce dispositif réalise la transformation du mouvement linéaire alternatif de l'extrémité de la bielle en un mouvement de rotation continu disponible sur la manivelle (vilebrequin), et vice-versa. Apparu en Occident à l'aube de la Renaissance (XIV^e siècle), il constitue une innovation majeure complétant les cinq machines simples héritées des mécaniciens grecs, même si ce dispositif existait déjà dans l'Empire romain (scierie de Hiérapolis). Sa cinématique, apparemment simple, cache une fonctionnalité technologique de première importance utilisée très couramment dans de nombreux mécanismes : moteur, pompe, scie, barrière automatique, etc.
Au XVIII^e siècle on l'utilise dans des dispositifs simples pour transformer l'énergie musculaire en mouvement rotatif (rouet).
Au XIX^e siècle apparait une nouvelle utilisation avec les machines à vapeur. Aujourd'hui, il reste la solution technique couramment mise en œuvre dans **les moteurs à piston** pour réaliser la variation cyclique de volume dans la chambre de combustion.

On considère ici que le système bielle-manivelle est dans la configuration où la liaison de l'extrémité de la bielle est une liaison glissière (cas des moteurs et pompes) ; que le mécanisme est un mécanisme plan et que l'axe du piston croise l'axe de la manivelle (axes concourant).



Dans cette configuration le point B est sur l'axe (Oy). On repère la position du mécanisme par la position angulaire θ de la manivelle. Vilebrequin tournant, l'angle θ est fonction du temps.

La géométrie, suivant le schéma ci-dessus, est décrite par :

• le rayon $R = OA$ de la manivelle	• la longueur $L = AB$ de la bielle	• la distance $d = OB$
• l'angle θ de rotation (= ωt dans le cas d'une vitesse constante)	• le rapport *bielle/rayon-manivelle* $\lambda = \dfrac{L}{R}$	

On note H le projeté orthogonal du point A sur l'axe (Oy).

1. Sur la première figure du document, indiquer le nom des pièces indiquées par les flèches.

2. Montrer que $\lambda \geqslant 1$.

3. Exprimer OH et HA en fonction de R et θ puis HB en fonction de x, R et θ.

4. Exprimer HB en fonction de L, R et θ.

5. Exprimer d en fonction de L, R et θ puis montrer que $d(\theta) = R\,(\sin\theta + \sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta}\,)$.

6. Montrer que la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période 2π.

Dans la suite on prend θ dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

7. **a.** Montrer soigneusement que $d'(\theta) = R\cos\theta\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda^2-\cos^2\theta}}\right)$.

b. Montrer que pour tout θ dans $]-\pi\,;\,\pi]$, $\lambda^2-\cos^2\theta \geqslant 1-\cos^2\theta$. En déduire que $\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda^2-\cos^2\theta}} \leqslant 1$.

c. Étudier les variations de d sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

8. Points morts

a. Pour quelles valeurs de θ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ la vitesse du piston s'annule-t-elle ?

b. Pour chacune des valeurs trouvées en **a.**, écrire OB en fonction de R et L.

Remarque : les positions de B correspondantes s'appellent « point mort haut » et « point mort bas ».

9. Course

La distance séparant les deux points morts est appelée *course* du piston. Déterminer-la.

Remarque : la longueur (L) de bielle n'a pas d'incidence sur la course.

Dans toute la suite, on utilise le logiciel de calcul formel Xcas

10. **a.** Définir la fonction d en entrant son expression $d(\theta)$.

b. Déterminer la vitesse du piston en fonction de θ (R et λ constantes) puis son accélération.

11. On prend ici $R = 2$. On considère chacun des cas suivants : $L = 7R$; $L = 4R$; $L = 1{,}5R$

a. Dans la feuille de calcul Xcas, définir les fonctions d_1, d_2 et d_3 qui correspondent aux trois cas étudiés.

b. Dans la feuille de calcul Xcas, représenter **dans un même graphique** les fonctions d_1, d_2 et d_3.
Commenter les allures, similitudes et différences.

c. Dans la feuille de calcul Xcas, représenter **dans un même graphique** les fonctions vitesse qui correspondent aux trois cas étudiés.
Commenter les allures, similitudes et différences.

d. Dans la feuille de calcul Xcas, représenter **dans un même graphique** les fonctions accélération qui correspondent aux trois cas étudiés.
Commenter les allures, similitudes et différences.

Point info :

Les courbes obtenues donnent la course, la vitesse et l'accélération du système bielle-manivelle pour différents rapports *longueur de bille / rayon de la manivelle*.

- *Bielle longue (L= 7R par exemple)* : course, vitesse et accélération sont des fonctions quasi-sinusoïdales. Cette configuration est exploitée sur les anciennes machines à vapeur.
- *Bielle moyenne (autour de L= 4R)* (rapport proche des valeurs en usage dans les moteurs à explosion) : course et vitesse restent des fonctions quasi-sinusoïdales, mais la décélération après le point mort haut est brusque, ce qui optimise la propagation du front de flamme. Autour du point mort bas, sur presque une demi-période, l'accélération est constante, ce qui favorise le remplissage et l'évacuation des gaz.
- *Bielle courte (L= 1,5×R par exemple)* : le point mort haut est bref alors que le point mort bas dure beaucoup plus longtemps. Cette configuration est propice au moteur bas régime et au compresseur.

Quelques **exemples de valeurs** conventionnelles dans le cas des moteurs thermiques :

- moteur de cyclomoteur 50 cm^3 : $R = 20$ et $L = 80 = 4R$ (mm) ;
- moteur de modélisme 6 cm^3 : $R = 10$ et $L = 35 = 3{,}5R$ (mm).