Utilisation des nombres complexes en électricité

Niveau : Terminale générale, Maths expertes.
Lien avec Les Maths au quotidien : Transport (d'électricité).
Compétences mises en jeu : Chercher C1, Modéliser C2, Calculer C4, Raisonner C5, Communiquer C6.
Ouverture interdisciplinaire : prolongement du programme de seconde de physique : Caractéristique tension-courant d'un dipôle. Résistance et systèmes à comportement de type ohmique. Loi d'Ohm. Préparation du programme de physique de 1re année de classe préparatoire (PCSI, MPSI…).

L'**impédance électrique** mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal.

La définition de l'impédance est une généralisation de la loi d'Ohm (courant continue) au courant alternatif. On passe de U = RI à $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$, avec $\underline{Z}$, $\underline{U}$ et $\underline{I}$ des nombres complexes.

Le mot **impédance** fut créé par le physicien britannique O. Heaviside en 1886. Il vient du verbe anglais *to impede* signifiant « retenir », « faire obstacle à » ; verbe qui dérive lui-même du latin *impedire* qui veut dire « entraver ».

Soit un composant électrique ou un circuit contenant un ou plusieurs dipôles linéaires passifs (résistances, bobines, condensateurs, mais pas de source). Si on l'alimente par une source sinusoïdale de pulsation ω, toutes les intensités et toutes les tensions dans les branches du circuit seront sinusoïdaux à la même pulsation ω mais pas forcément en phase.

Prenons un dipôle traversé par un courant alternatif sinusoïdal - d'intensité $I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi_1)$
- de tension à ses bornes $U(t) = U_{max} \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Si $\varphi_1 \neq \varphi_2$, il y a un déphasage.

Pour définir l'**impédance** du dipôle (mais pas que…), on associe à $I(t)$ et $U(t)$ les deux nombres complexes $\underline{I}(t) = I_{max}(\cos(\omega t + \varphi_1) + i \sin(\omega t + \varphi_1))$ et $\underline{U}(t) = U_{max}(\cos(\omega t + \varphi_2) + i \sin(\omega t + \varphi_2))$.

$I(t)$ et $U(t)$, qui sont des quantités réelles, sont alors les parties imaginaires des deux nombres complexes $\underline{I}(t)$ et $\underline{U}(t)$.

Remarques :

1. Le nombre complexe i est souvent noté j en électricité pour éviter la confusion avec l'intensité du courant.
2. En changeant l'origine des temps, on aurait pu écrire des « cos » à la place des « sin » et alors $I(t)$ et $U(t)$ seraient vus comme les parties réelles de $\underline{I}(t)$ et $\underline{U}(t)$, ou bien on pourrait prendre $\varphi_1 = 0$ (et à ce moment-là φ_2 serait remplacé par $\varphi_2 - \varphi_1$, qui mesure le déphasage)… On démontra cela dans la partie III du présent document.

L'**impédance** d'un dipôle linéaire passif de bornes A et B en régime sinusoïdal est le quotient de la tension entre ses bornes et de l'intensité du courant qui le traverse : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

$\underline{Z}$ est un nombre complexe qui a donc une forme algébrique : $\underline{Z} = R + i X$, avec R et X des nombres réels.

R est la partie réelle dite **résistive**, appelée **résistance** et X est la partie imaginaire dite **réactive**, appelée **réactance**. Une réactance positive sera qualifiée d'*inductive*, alors qu'une réactance négative sera qualifiée de *capacitive*.

Comme on l'a dit, l'**impédance électrique** $\underline{Z}$ mesure l'opposition du dipôle au passage du courant.

R nous renseigne sur l'énergie dissipée par le dipôle sous forme de chaleur. Par exemple une résistance (de lave-linge, de lave-vaisselle, de bouilloire électrique) a idéalement une impédance purement résistive (X est nulle).

X nous renseigne sur l'énergie emmagasinée par le dipôle, celle-ci n'est pas dissipée et peut être restituée au circuit.
Deux exemples de dipôles idéalement purement réactifs :
- les bobines, créatrices de champs magnétiques, qui ont une réactance positive (inductances)
- les condensateurs qui stockent l'énergie et qui ont une réactance capacitive (capacitance).

Le concept d'impédance permet d'appliquer au régime sinusoïdal les formules utilisées en régime continu, tout en intégrant l'effet d'éléments capacitifs et inductifs.

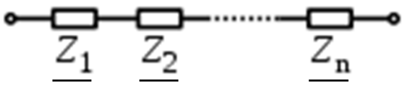
Partie I

Lien avec le programme : Nombres complexes : point de vue algébrique. Opérations.

A. Circuit de plusieurs dipôles

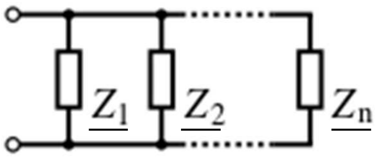
Considérons un circuit électrique comprenant n dipôles ($n \geqslant 2$). Le calcul de l'impédance équivalente d'un ensemble d'impédances se traite comme les résistances avec la loi d'Ohm :

Ensemble de *n* impédances en série.



L'impédance équivalente à des impédances en série est la somme des impédances : $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \ldots + \underline{Z}_n$

Ensemble de *n* impédances en parallèle.

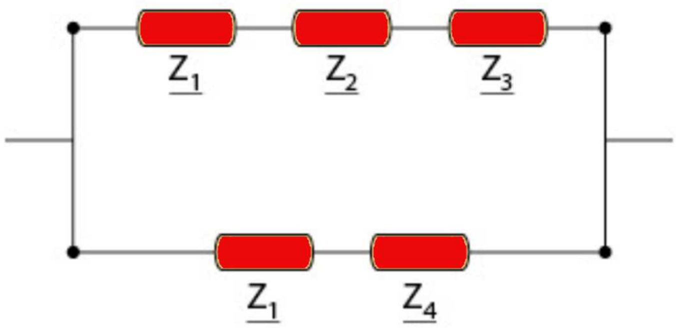


L'inverse de l'impédance équivalente à des impédances en parallèle est la somme des inverses des impédances.

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \ldots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

Déterminer l'impédance $\underline{Z}$ du montage ci-contre :
$\underline{Z}_1 = 3$,
$\underline{Z}_2 = 10\mathrm{i}$
$\underline{Z}_3 = -2\mathrm{i}$
$\underline{Z}_4 = 2 - \mathrm{i}$.

C1, C4



B. Ligne de transmission

Lors d'une réception d'un signal émis par un satellite, une partie du signal traversant la parabole et le câble coaxial est réfléchie en arrière à cause des impédances de ces deux matériels.

On mesure cette perte par le coefficient de réflexion C*R* défini par $CR = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ où z_1 est l'impédance complexe de la parabole et z_2 celle du câble coaxial.

Une installation fournit $z_1 = 75$ et $z_2 = 46{,}6 - 20{,}3\mathrm{i}$.

1. Écrire C*R* sous forme algébrique $a + b\mathrm{i}$. **C4**

2. **a.** La superposition de ces deux ondes (en avant et en arrière) dans la ligne provoque l'apparition d'ondes stationnaires : à certains endroits de la ligne, les amplitudes des deux ondes s'additionnent, l'on a des *ventres* (forte amplitude) ; en d'autres endroits, les amplitudes se soustraient, l'amplitude de l'onde résultante est minimum, c'est ce que l'on appelle les *nœuds*.

Le Rapport d'Ondes Stationnaires est défini par $\text{ROS} = \dfrac{1+p}{1-p}$, où $p = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pour respecter la norme imposer le ROS doit être inférieur à 2. L'installation est-elle conforme ? **C1, C4**

b. Dans le cas général, pour toute installation, on admet que p est compris entre 0 et 1. Quelle est la valeur maximale de p qui respecte la norme imposée ? **C3, C4**

Partie II

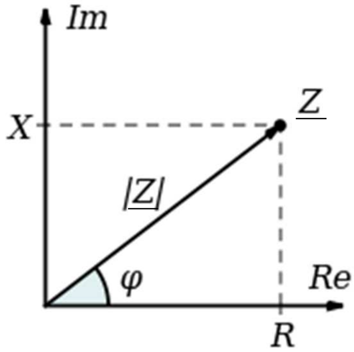
Lien avec le programme : Nombres complexes : point de vue géométrique. Image d'un nombre complexe. Module et arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique. Forme trigonométrique.

On rappelle que l'**impédance** d'un dipôle linéaire passif de bornes A et B en régime sinusoïdal de courant et de tension comme le quotient de la tension entre ses bornes et du courant qui le traverse : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ avec :

$\underline{I} = I_{max}\,(\cos(\omega\, t + \varphi_1) + i \sin(\omega\, t + \varphi_1))$ et $\underline{U} = U_{max}\,(\cos(\omega\, t + \varphi_2) + i \sin(\omega\, t + \varphi_2))$.

1. Donner le module et un argument de $\underline{I}$, le module et un argument de $\underline{U}$. **C1**

2. En déduire le module et un argument de $\underline{Z}$ et écrire $\underline{Z}$ sous forme trigonométrique. **C5**



Noter que l'impédance du dipôle est une constante complexe et se rappeler que sa partie réelle R et sa partie imaginaire X s'interprète concrètement en terme de résistance et de réactance du dipôle.

Le module de l'impédance, appelé **impédance apparente**, est homogène à une résistance et se mesure en ohms.
Un argument φ de $\underline{Z}$ mesure le déphasage entre l'intensité et la tension du courant électrique traversant le dipôle.

Exemples :

- L'impédance d'une résistance idéale R est égale à R.
C'est le seul composant à avoir une impédance purement réelle.

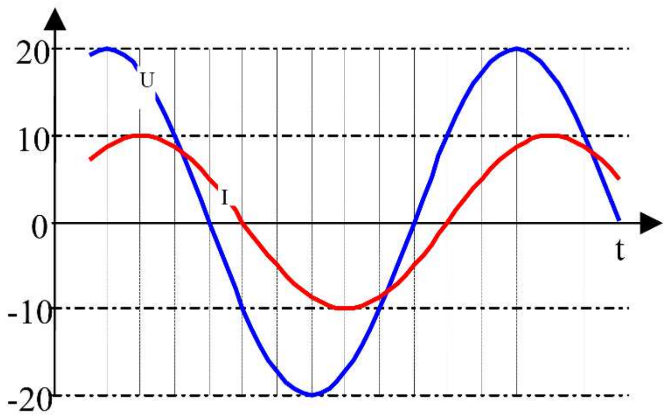
- L'impédance d'une bobine idéale d'inductance L est Lωi où ω est la pulsation du signal.
  Elle est imaginaire pur de partie imaginaire positive, et dépend de la fréquence du signal.

- L'impédance d'un condensateur idéal de capacité C est $-\frac{1}{C\omega}\,i$ où ω est la pulsation du signal. Elle est imaginaire pur de partie imaginaire négative, et dépend de la fréquence du signal.

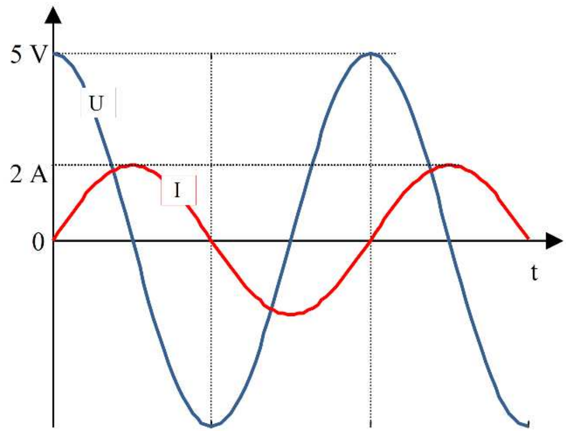
3. Calculer sous forme trigonométrique l'impédance du dipôle dans le cas où :
$I(t) = 0{,}2 \sin\left(100\pi\, t + \frac{\pi}{3}\right)$ et $U(t) = 3 \sin\left(100\pi\, t + \frac{\pi}{4}\right)$. **C4**

4. À partir des relevés de U et I ci-contre, déterminer la valeur de $\underline{Z}$ à la fréquence considérée. **C1, C4**

a.



b.



Partie III

Lien avec le programme : Nombres complexes et trigonométrie.
Formules d'addition. Forme exponentielle d'un nombre complexe. Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration…).

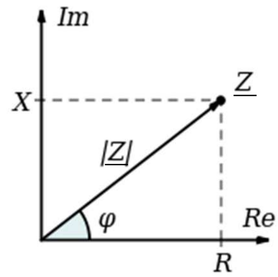
Partie A

On rappelle que l'**impédance** d'un dipôle linéaire passif de bornes A et B en régime sinusoïdal de courant et de tension comme le quotient de la tension entre ses bornes et du courant qui le traverse : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ avec :

$\underline{I} = I_{max}(\cos(\omega t + \varphi_1) + i\sin(\omega t + \varphi_1))$ et $\underline{U} = U_{max}(\cos(\omega t + \varphi_2) + i\sin(\omega t + \varphi_2))$.

1. Écrire $\underline{I}$ et $\underline{U}$ sous forme exponentielle. **C1**
2. En déduire $\underline{Z}$ sous forme exponentielle et donner son module et un argument. **C4, C5**

On rappelle que le module de l'impédance, appelé **impédance apparente**, est homogène à une résistance et se mesure en ohms. Un argument φ de $\underline{Z}$ mesure le déphasage entre l'intensité et la tension du courant électrique à la sortie du dipôle.



Partie B

On a $I = I_{max}\sin(\omega t + \varphi_1)$.
Nous allons ici démontrer les éléments affirmés dans la remarque de la page 1 de ce document.

1. Montrer qu'en changeant l'origine du temps et en posant $t' = t + \frac{\varphi_1}{\omega}$, on se ramène à $I = I_{max}\sin(\omega t')$.
   Montrer alors que $U = U_{max}\sin(\omega t' + \varphi_2 - \varphi_1)$.
2. Montrer qu'en changeant l'origine du temps et en posant $t' = t - \frac{\pi}{2\omega}$, on se ramène à $I = I_{max}\cos(\omega t' + \varphi_1)$ et $U = U_{max}\cos(\omega t' + \varphi_2)$.

Partie C

Prenons à présent une résistance (dipôle purement résistif), de résistance R, traversé par un courant alternatif sinusoïdal de tension à ses bornes $U(t) = U_{max}\sin(\omega t)$.

On rappelle que la période T et la pulsation ω sont reliées par la relation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

U(*t*) et I(*t*) varient au cours du temps de manière sinusoïdale. Pour connaitre les effets de ce courant sur la résistance, on est amené à définir la tension efficace et l'intensité efficace du courant alternatif. C'est la valeur d'une tension et d'une intensité d'un courant continu qui produirait un échauffement identique dans la résistance.
On rappelle que l'énergie thermique (échauffement) absorbée par la résistance sur une période T s'exprime par $E = \frac{T}{R} \times U^2$ pour un courant continu de tension constante U. L'énergie thermique E est donc proportionnelle à U^2.

1. Pour un courant alternatif sinusoïdal où U varie, on va écrire $E = \frac{T}{R} \times U^2_{moy}$ où U^2_{moy} est la valeur moyenne sur une période T, par exemple sur [0 ; T].

   a. Écrire alors E à l'aide d'une intégrale. **C1** **b.** En déduire que $U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \times \int_0^T U^2(t)\,dt$ **C4**

2. **a.** À l'aide de la formule d'Euler, montrer que $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$. **C4**

   b. En déduire que $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$. **C4**

3. On démontrerait exactement de la même manière que $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$. En déduire R en fonction de U_{eff} et I_{eff}. **C3**