

Analyse entrée-sortie de Leontief

Niveau : terminale générale. Maths expertes

I- En classe, à la maison, ou en DTL (avant le TP).

II- TP en salle informatique avec un tableur.

Lien avec le programme : I- Matrice, coefficients, produit matriciel, règles de calculs.

II- Inverse d'une matrice, résolution matricielle d'un système linéaire.

Lien avec Les maths au quotidien : Modèles économiques.

Wassily Leontief, économiste américano-soviétique et lauréat du « prix Nobel » d'économie en 1973, est l'auteur de travaux sur l'analyse interindustrielle, dont il élaborera des tableaux d'échanges interindustriels (TEI) ou tableaux d'entrées-sorties (TES).



I- Premier exemple

Soit un pays fictif sans échanges extérieurs, dont l'économie très simplifiée se décompose en deux branches seulement : l'agriculture et l'industrie.

L'agriculture (branche 1) : la production est de 500 000 € répartie en :

- *consommations intermédiaires* : 200 000 € consommés par l'industrie (agro-alimentaire...)
50 000 € consommés par l'agriculture elle-même (engrais verts...)
- le reste en *demande finale* : 250 000 €, disponible pour satisfaire les besoins de la population.

L'industrie (branche 2) : la production est de 2 500 000 € répartie en :

- *consommations intermédiaires* : 150 000 € consommés par l'agriculture (engrais chimiques, énergie, machines...)
550 000 € consommés par l'industrie elle-même (énergie, machines...)
- le reste en *demande finale* : 1 800 000 €, disponible pour satisfaire les besoins de la population.

1. Donner le vecteur colonne P des productions totales puis le vecteur colonne D_F des demandes finales.
2. Compléter le tableau d'échanges interbranches : le nombre inscrit à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la partie de la production de la branche i , consommée par la branche j .
Ici, la branche 1 est l'agriculture et la branche 2 est l'industrie.

	Consommation de l'agriculture	Consommation de l'industrie
Produit agricole		
Produit industriel		

3. La matrice des **coefficients techniques** est définie de la manière suivante :

$$c_{ij} = \frac{\text{consommation intermédiaire de produit } i \text{ par la branche } j}{\text{production de la branche } j} \quad (\text{représente donc la quantité d'unités, euros ici, produite par la branche } i \text{ nécessaire pour produire une unité de la branche } j.)$$

La matrice des coefficients techniques est donc de la forme : $C = \begin{pmatrix} \dots & \frac{200\,000}{2\,500\,000} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ où 200 000 € est la consommation en produit agricole par l'industrie et où 2 500 000 € est la production de l'industrie. Compléter la matrice C et en donner une forme simplifiée.

4. Calculer le produit $C \times P$. Que retrouve-t-on ?
5. En admettant que : « production totale = consommations intermédiaires + demandes finales » Justifier l'égalité suivante : $(I_2 - C) \times P = D_F$.

On appelle **matrice de Leontief** la matrice $L = I_2 - C$.

TP- Modèle input-output de Leontief

On donne dans la feuille du tableau (à télécharger), la représentation de l'économie américaine en 1947, condensée en 4 secteurs (85 secteurs à l'origine). Cette économie est présentée sous forme d'un tableau d'échanges (*input-output table*) avec les consommations intermédiaires par secteur.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			CONSOMMATIONS INTERMEDIAIRES					
2			Agriculture	Industrie	Services	Gvts et autres	Demande finale	Production Totale
3	PRODUCTION	Agriculture	15 285	25 838	168	111		46 712
4		Industrie	10 093	141 963	10763	5 077		360 998
5		Services	380	9 318	2 109	341		31 967
6		Gouvernement et autres	51	9 634	1081	114		26 015
7		Total						465 692

Les données fournies sont exprimées en millions de dollars de 1947 (Source U.S.Bureau of Economic Analysis).

Partie A : Exploitation du tableau

- Donner la signification des éléments entourés dans le tableau.
- Quelle formule faut-il taper en C7 pour obtenir par recopie automatique les valeurs de la plage C7 à F7 ?
- Compléter sur la feuille de calculs les cellules C7 à F7. Donner la signification des valeurs trouvées.
- On rappelle que : « production totale = consommations intermédiaires + demandes finales ». Compléter la colonne "Demande finale" à l'aide d'une formule recopiée.
 - Quelle formule faut-il taper en C10 pour obtenir le premier terme de la matrice des coefficients techniques C associée à la répartition sectorielle proposée ?
 - Compléter alors la plage C10 à F13 pour obtenir la matrice C ci-dessous.

	E	C	D	E	F
10	Matrice C	0,32721785	0,071573804	0,0052554	0,004266769
11		0,21606868	0,393251486	0,336691	0,19515664
12		0,00813495	0,025811777	0,0659743	0,013107822
13		0,0010918	0,026687128	0,0338161	0,004382087

- En utilisant cette matrice C et la matrice-colonne de production P, retrouver par un calcul matriciel sur tableau la matrice-colonne des demandes finales D_F de production.

Partie B : Utilisation de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$ pour déterminer la production en fonction de la demande

- À l'aide du tableur, déterminer la **matrice de Leontief** $I_4 - C$, puis son inverse $(I_4 - C)^{-1}$.
- On suppose que la demande finale augmente d'une unité pour le secteur *Agriculture*.

La nouvelle matrice-colonne des demandes finales est donc $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 311 \\ 193 & 102 \\ 19 & 819 \\ 15 & 135 \end{pmatrix}$

Déterminer les nouvelles productions globales par secteur.

Partie C : Interprétation des coefficients de $(I_4 - C)^{-1}$

- Calculer la différence entre la nouvelle et l'ancienne matrice-colonne des productions (parties B et A).
 - Comparer avec les colonnes de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$ et commenter.
- Reprendre le travail précédent avec les nouvelles matrices-colonnes de demandes suivantes :

$$D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 310 \\ 193 & 103 \\ 19 & 819 \\ 15 & 135 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 5 & 310 \\ 193 & 102 \\ 19 & 820 \\ 15 & 135 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 5 & 310 \\ 193 & 102 \\ 19 & 819 \\ 15 & 136 \end{pmatrix}$$

3. Bilan

- En utilisant $(I_4 - C)^{-1}$, quelle modification faut-il opérer sur la matrice-colonne des productions globales fournies initialement pour traduire l'augmentation d'une unité de la demande finale pour un secteur donné ?
- Donner finalement une interprétation du terme d'indices (i,j) de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$.

Annexe TP Analyse entrée-sortie

AIDE TABLEUR

tâche	aide	exemple
Calculer la somme des valeurs d'une plage de valeurs.	=SOMME(<i>cellule départ</i> : <i>cellule fin</i>)	=SOMME(B1:B5) calcule la somme des valeurs des cellules B1 à B5.
Étirer une formule.	La poignée de recopie est située en bas à droite des cellules sélectionnées et marquée par un petit carré.	
Créer une référence absolue : la référence sera verrouillée et ne subira aucune modification lors d'un étirage de formule.	Faire précéder la référence du symbole \$ (dollar).	\$A1 fera toujours référence à la colonne A. A\$1 fera toujours référence à la ligne 1. \$A\$1 fera toujours référence à la cellule A1.
Calculer un produit de deux matrices.	Dans une plage de cellules de la dimension de la matrice résultat , taper : =PRODUITMAT(matrice1;matrice2) Ctrl + Maj + Entrée	=PRODUITMAT(A1:C3;D1:D3) renvoie le produit de la matrice 3x3 dont les coefficients sont dans les cellules A1 à C3 par la matrice colonne dont les coefficients sont dans les cellules D1 à D3.
Calculer l'inverse d'une matrice (carrée inversible).	Dans une plage de cellules de la dimension de la matrice , taper : =INVERSEMAT(matrice) Ctrl + Maj + Entrée	=INVERSEMAT(A1:C3) renvoie l'inverse de la matrice 3x3 dont les coefficients sont dans les cellules A1 à C3.

✂.....

Dans ce document apparaissent en particulier les compétences suivantes :

COMPETENCES ATTENDUES		Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition			
			-			+
C1 Chercher	Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile.	I-1. I-2.				
		II-A.1.				
C2 Modéliser	Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	II- B.				
C3a C3b Calculer	Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer des simplifications.	I-4.				
		II-				
		I-5.				
C4 Raisonner	Effectuer des déductions pour obtenir de nouveaux résultats,	II-B.2. II-C.3.				
C5a Communiquer C5b.	Développer une argumentation mathématique correcte. S'exprimer avec clarté et précision.	I-5.				
		Toutes				

NOM – Prénom :