

Le théorème des restes chinois

Niveau : Terminale, Mathématiques Expertes.

Lien avec le programme : Théorème de Bézout. Théorème de Gauss. Lemme chinois et applications à des situations concrètes.

Lien avec Les maths au quotidien : Loisirs – Navigation– Astronomie– Dates et heures...

A. Le théorème

Soient m et n deux nombres entiers naturels premiers entre eux, avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$.

Soient a et b deux nombres entiers relatifs.

On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv a \ [m] \\ x \equiv b \ [n] \end{cases}$, où x désigne un nombre entier relatif.

- Justifier qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu + nv = 1$.
 - Vérifier que $x_0 = anv + bmu$ est une solution particulière du système (S).
 - Démontrer que tout entier $x = x_0 + kmn$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution du système (S).
- Justifier que (S) est équivalent au système $\begin{cases} x \equiv x_0 \ [m] \\ x \equiv x_0 \ [n] \end{cases}$.
 - Donner alors l'ensemble des solutions du système (S).

B. Applications

- Depuis un certain endroit, un phare a son faisceau lumineux visible toutes les 15 secondes et un second phare toutes les 28 secondes. On a aperçu le signal du premier à minuit et deux secondes et celui du second à minuit et huit secondes. À quelle heure au plus tôt les deux signaux coïncideront-ils ?
- Une comète est passée près de la Terre en 1986 et a une période de 76 ans. Une autre est passée près de la Terre en 2004 et a une période de 13 ans. Passeront-elles près de la Terre la même année ? Si oui, en quelles années ?
- Voici un problème trouvé dans un livre du mathématicien chinois Sun Zi, le *Sunzi suanjing*, datant du III^e siècle. Il est repris par le mathématicien chinois Qin Jiushao dans son ouvrage le *Shùshū Jiūzhāng* (« Traité mathématique en neuf chapitres ») publié en 1247.

« Combien l'armée de Han Xin compte-t-elle de soldats si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes, il reste trois soldats, et rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ? »

Soit n le nombre de soldats.

- Écrire un système (S) de congruences dont n est solution.
- Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 2 \ [3] \\ x \equiv 3 \ [5] \end{cases}$.
- Résoudre alors le système (S).
- Le nombre n de soldats est compris entre 7 000 et 7 100. Déterminer la valeur de n .

On retrouve ce problème presque à l'identique en 1202 dans le *Liber Abbaci* de Fibonacci dans le chapitre XII qui concerne les problèmes et énigmes où l'on trouve également le problème des lapins de la suite de Fibonacci. Le problème avait aussi été étudié par Ibn al-Haytham (Alhazen) dont Fibonacci a pu lire les œuvres. Euler s'est également intéressé à cette question, ainsi que Gauss.

- Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?