

# QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE LA SUITE DE FIBONACCI

**Niveau** : terminale S spécialité.

**Lien avec le programme** : raisonnement par récurrence, matrices carrées, matrices colonnes : opérations, suite de matrices colonnes  $(U_n)$  vérifiant une relation de récurrence du type  $U_{n+1} = AU_n$ . Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , congruences dans  $\mathbb{Z}$ , PGCD de deux entiers, entiers premiers entre eux, identité de Bézout, nombres premiers.

**Lien avec *Les maths au quotidien*** : thème Nombre d'or.

Soit  $n$  un entier naturel. On définit la suite de Fibonacci définie par 
$$\begin{cases} f_0 = 0, f_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Cette suite doit son nom au mathématicien italien Leonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de *Fibonacci* (1170-1250). Elle apparaît dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrivant la croissance d'une population de lapins.

Remarque, on peut rencontrer aussi  $f_0 = 1$  au lieu de  $f_0 = 0$  (cela ne produit qu'un décalage...)

On admet que la suite  $(f_n)$  est une suite croissante d'entiers naturels.

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$  où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$ .  
b. En déduire que pour  $p$  et  $q$  entiers naturels,  $f_{p+q} = f_p f_{q+1} + f_{p-1} f_q$  (on pourra poser  $n = p + q$ ).  
c. Montrer que si un entier  $r$  divise  $f_p$  et divise  $f_q$ , alors  $r$  divise  $f_{p+q}$ .
3. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f_p$  divise  $f_{np}$  (on pourra faire un raisonnement par récurrence ou bien regarder  $A^p$  et  $A^{np}$  modulo  $f_p$ ).
4. Soit  $n$  un entier naturel différent de 4.  
Montrer que si  $f_n$  est premier alors  $n$  est premier. Examiner la réciproque.
5. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls,  $d = \text{PGCD}(a, b)$  et  $D = \text{PGCD}(f_a, f_b)$ .
  - a. Montrer que  $f_d$  divise  $D$ .
  - b. Utiliser l'identité de Bézout pour montrer que  $D$  divise  $f_d$ .
  - c. Conclure.
6. Étudier le caractère « premiers entre eux » de  $f_a$  et  $f_b$ .