QUELQUES PROPRIETES ARITHMETIQUES DE LA SUITE DE FIBONACCI

Niveau : terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme : raisonnement par récurrence, matrices carrées, matrices colonnes : opérations, suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n$. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, congruences dans $\mathbb{Z}$, PGCD de deux entiers, entiers premiers entre eux, identité de Bézout, nombres premiers.

Lien avec *Les maths au quotidien* : thème Nombre d'or.

Soit n un entier naturel. On définit la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} f_0 = 0, f_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$.

Cette suite doit son nom au mathématicien italien Leonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de *Fibonacci* (1170-1250). Elle apparaît dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrivant la croissance d'une population de lapins.
Remarque, on peut rencontrer aussi $f_0 = 1$ au lieu de $f_0 = 0$ (cela ne produit qu'un décalage…)

On admet que la suite (f_n) est une suite croissante d'entiers naturels.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. En déduire que pour p et q entiers naturels, $f_{p+q} = f_p f_{q+1} + f_{p-1} f_q$ (on pourra poser $n = p + q$).

c. Montrer que si un entier r divise f_p et divise f_q, alors r divise f_{p+q}.

3. Soit p un entier naturel non nul.
Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, f_p divise f_{np} (on pourra faire un raisonnement par récurrence ou bien regarder A^p et A^{np} modulo f_p).

4. Soit n un entier naturel différent de 4.
Montrer que si f_n est premier alors n est premier. Examiner la réciproque.

5. Soit a et b deux entiers naturels non nuls, $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $D = \text{PGCD}(f_a, f_b)$.

a. Montrer que f_d divise D.

b. Utiliser l'identité de Bézout pour montrer que D divise f_d.

c. Conclure.

6. Étudier le caractère « premiers entre eux » de f_a et f_b.