

Ensembles de Julia

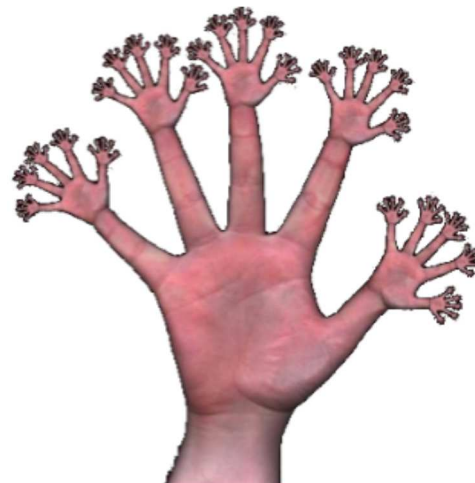
Niveau : Terminale, Mathématiques Expertes.

Lien avec le programme : Nombres complexes : point de vue géométrique.
Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia.

Lien avec Les maths au quotidien : Thème « Fractales ».

Une fractale est un objet mathématique dont la structure est invariante par changement d'échelle (autosimilarité).

Dans ce TP, vous allez étudier quelques exemples d'**ensembles de Julia**, du nom du mathématicien français Gaston Julia (1893-1978), spécialiste des fonctions d'une **variable complexe**.



Soit ω et c deux nombres complexes. On considère une suite de nombres complexes (z_n) définie sur \mathbb{N} par :
 $z_0 = \omega$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Pour tout entier naturel n , on note $u_n = |z_n|$.

Dans un repère du plan complexe, notons M_n l'image de z_n .

L'**ensemble de Julia rempli**, noté J_c , est l'ensemble des nombres complexes ω tels que la suite (u_n) est bornée, c'est-à-dire que tous les points M_n d'affixe z_n restent dans un certain disque centré sur l'origine du repère.

A. Étude avec un tableur

On choisit dans cette partie $c = -1$.

On souhaite déterminer si un nombre complexe z_0 appartient à l'ensemble de Julia rempli associé à $c = -1$.

1. Pour tout entier naturel n , on note $z_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n réels.

Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

2. → Ouvrir une feuille de calcul sur tableur et la remplir comme ci-dessous (n allant de 0 à 100).

	A	B	C	D
1	n	x_n	y_n	u_n
2	0			
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			

a. Quelles formules faut-il rentrer dans les cellules B3 et C3, à étendre vers le bas ?

b. Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule D2, à étendre vers le bas ?

c. Déterminer deux valeurs de z_0 pour lesquelles la suite (u_n) est bornée et deux valeurs de z_0 pour lesquelles la suite (u_n) ne semble pas bornée.

B. Représentation graphique d'un ensemble de Julia avec Python

→ Ouvrir le fichier Julia.py

La fonction « Julia » a comme paramètre N le nombre de valeurs de z_0 que l'on veut tester.

On admet que s'il existe un entier n tel que $u_n > 2$, alors (u_n) n'est pas bornée.

→ Pour les champions, chercher une démonstration sur internet (raisonnement par récurrence).

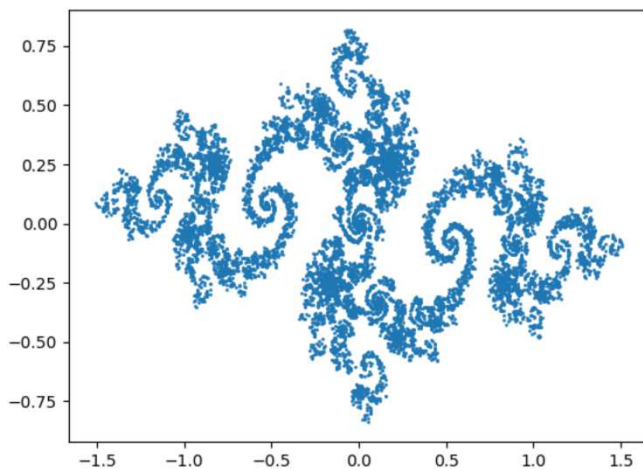
Afin de tester si $u_n > 2$, on se limitera ici aux valeurs de n inférieures ou égales à 100 :

On considérera que si $u_n \leq 2$ pour tout $n \leq 100$, alors z_0 appartient à l'ensemble de Julia.

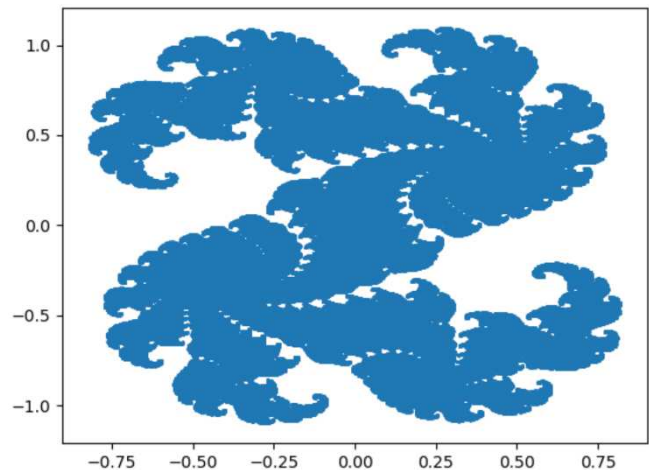
```
from random import *
from math import *
from pylab import *
def Julia(N):
    LX = []
    LY = []
    for i in range(N):
        z0 = random()*4-2+1j*(random()*4-2)
        z=z0
        k=0
        while (..... and k<100):
            k = k+1
            z = z**2-1
        if k == 100:
            LX.append(z0.real)
            LY.append(z0.imag)
    scatter(LX,LY,s=1)
    show()
```

1. `random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Que renvoie `random()*4 - 2` ?
2. a. Dans le programme, remplacer les pointillés de l'instruction « while » par un script adéquat.
b. Tester ce programme pour $N = 10\,000$ puis pour $N = 1\,000\,000$.
L'ensemble de Julia représenté s'appelle « la basilique ».
Zoomer une ou deux fois sur une partie du graphique pour visualiser la propriété d'autosimilarité.
c. Modifier ce programme pour représenter l'ensemble de Julia lorsque :
 $c = 0,25$ (chou-fleur) ; $c = -1,7548$ (avion) ; $c = -0,123 + 0,745i$ (lapin de Douady)
d. Représenter l'ensemble de Julia pour une valeur de c de votre choix.

Autres exemples :



$c = -0,7927 + 0,1609i$



$c = 0,32 + 0,043i$

Point info :

Pour les ensembles de Julia, le nombre complexe c est fixé et on s'intéresse aux différentes valeurs de z_0 tels que (u_n) est bornée.

Si maintenant on fixe z_0 à 0 et que c lui n'est plus fixé, et que l'on s'intéresse à l'ensemble des nombres complexes c tels que (u_n) soit bornée, on définit ce qu'on appelle l'ensemble de Mandelbrot, du nom du mathématicien polonais-franco-américain Benoît Mandelbrot (1924 - 2010), qui a été notamment élève de Gaston Julia, et père de la géométrie fractale.

L'ensemble de Mandelbrot est une fractale. Voici sa représentation graphique.

