

C'EST LE PIED

Niveau : devoir en temps libre, terminale S.

Lien avec le programme : fonctions trigonométriques, étude de fonction, utilisation du calcul formel, problème en lien avec une autre discipline (la physique).

Lorsque vous vous tenez debout et immobile, vous avez sans doute remarqué que vous placez naturellement vos pieds symétriquement suivant un certain angle. Vous sentez que cette position-là assure le meilleur équilibre.

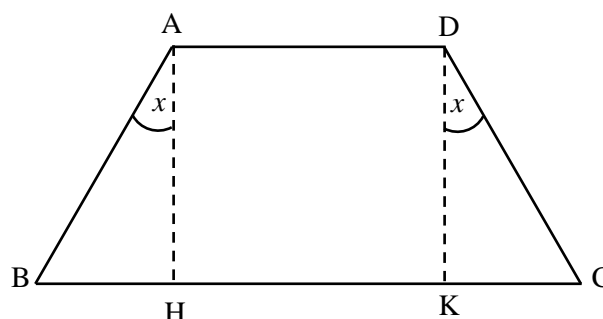


La physique assure que vous êtes en équilibre quand la projection verticale de votre centre de gravité sur le sol appartient au polygone de sustentation formé par vos pieds et que cet équilibre est maximal lorsque l'aire de ce polygone est maximale.

Mais c'est quoi, un polygone de sustentation ?

Sur le schéma ci-contre, les segments $[AB]$ et $[CD]$ modélisent les pieds.

Le polygone de sustentation est le trapèze isocèle $ABCD$.



Supposons pour rigoler que l'écartement entre vos pieds est exactement la longueur de vos pieds. Quel(les) est (sont) alors la (les) valeurs de l'angle α rendant l'aire du trapèze $ABCD$ maximale ?

Pour répondre à cette question, il ne va pas falloir s'y prendre comme un pied.

On prend pour unité de longueur la longueur de votre pied (par exemple 24 cm si vous chaussez du 39...). On a donc $AB = DC = AD = 1$. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et K celui de D .

Soit x une mesure en radians des angles \widehat{BAH} et \widehat{CDK} . x appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On note $A(x)$ l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x .

1. La feuille de calcul formel suivante peut vous enlever une épine du pied. Retrouver les résultats fournis.

1	$A(x) := \cos(x) \times (\sin(x) + 1)$	
	$x \rightarrow \cos(x) \times (\sin(x) + 1)$	M
2	$\text{deriver}(A(x))$	
	$(-\sin(x)) \times (\sin(x) + 1) + \cos(x) \times \cos(x)$	M
3	$\text{trigsin}(\text{ans}())$	
	$-2 \times \sin(x)^2 - \sin(x) + 1$	M
4	$\text{factor}(\text{ans}())$	
	$-(\sin(x) + 1) \times (2 \times \sin(x) - 1)$	M

2. Prenez au pied de la lettre la demande suivante : dresser le tableau de variation de f et conclure.