

Dépense minimale

Niveau : terminale STG, fin de chapitre, avec la feuille de calcul Excel et le fichier GeoGebra joints, projetés avec un vidéoprojecteur.

Lien avec le programme : programmation linéaire. Résoudre graphiquement un problème qui conduit à maximiser ou minimiser une expression du type $ax + by$ sous plusieurs contraintes linéaires. Exemple : coût minimal. Dans le cas d'une recherche de solutions entières, situation où la résolution peut être abordée avec un tableur.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Porte-monnaie.

Le gérant d'un hôtel doit renouveler une partie du linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Ses deux fournisseurs lui proposent :

- Fournisseur 1 : un lot de 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 40 €.
- Fournisseur 2 : un lot de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette pour 80 €.

Le but de ce travail est de déterminer le nombre x de lots que le gérant va acheter au fournisseur 1 et le nombre y de lots qu'il va acheter au fournisseur 2, afin que la dépense soit minimale.

Partie 1 : détermination des contraintes

1. Déterminer, à l'aide d'un tableau, le système des contraintes correspondant à ce problème.

2. Montrer que ce système est équivalent, pour x et y entiers, au système \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

3. Exprimer en fonction de x et y la dépense d correspondant à l'achat de x lots au fournisseur 1 et y lots du fournisseur 2.

Partie 2 : utilisation d'une feuille de calcul

Le gérant décide d'utiliser un tableur pour déterminer le couple $(x ; y)$ qui lui fournira la dépense minimale. On donne en haut de la page suivante la feuille de calcul qu'il utilise.

Dans cette feuille de calcul :

x apparait dans la colonne A et y dans la ligne 1.

La colonne A a d'ailleurs été nommée x et la ligne 1 a été nommée y afin que ces deux lettres puissent être utilisées dans les formules.

Dans la cellule B2, le gérant a inscrit une formule qui :

- calcule la dépense pour x lots du fournisseur 1 et y lots du fournisseur 2 achetés, si le couple $(x ; y)$ satisfait aux contraintes ;
- laisse la cellule vide si le couple $(x ; y)$ ne satisfait pas aux contraintes.

Le gérant a ensuite étiré sa formule vers le bas puis vers la droite à l'aide de la poignée de recopie.

1. Recopier et compléter la formule inscrite par le gérant en B2 :

= SI(((2*x+3*y>=90)*ET(.....)*ET(.....)); ; " ")

2. À l'aide de la feuille de calcul, fournir la dépense minimale et indiquer les valeurs de x et y correspondantes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y															
1	x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23															
2	0																																							
3	1																																							
4	2																																							
5	3																																							
6	4																																							
7	5																																							
8	6																																							
9	7																																							
10	8																																							
11	9																																							
12	10																																							
13	11																																							
14	12																																							
15	13																								2360															
16	14																								2320 2400															
17	15																					2200	2280	2360	2440															
18	16																					2240	2320	2400	2480															
19	17																					2200	2280	2360	2440	2520														
20	18																					2160	2240	2320	2400	2480	2560													
21	19																					2200	2280	2360	2440	2520	2600													
22	20																					2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640												
23	21																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680											
24	22																					2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720											
25	23																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760										
26	24																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800									
27	25																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840									
28	26																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880								
29	27																					2040	2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920							
30	28																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960							
31	29																					2040	2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000						
32	30																					2000	2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040					
33	31																					2040	2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080					
34	32																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120					
35	33																					2040	2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160				
36	34																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200				
37	35																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240				
38	36																					2080	2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	3280			
39	37																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240	3320			
40	38																					2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	3280	3360			
41	39																					2120	2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240	3320	3400		
42	40																					2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	3280	3360	3440		
43	41																					2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240	3320	3400	3480		
44	42																					2160	2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	3280	3360	3440	3520	
45	43																					2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240	3320	3400	3480	3560	
46	44																					2240	2320	2400	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	3280	3360	3440	3520	3600	
47	45																					2200	2280	2360	2440	2520	2600	2680	2760	2840	2920	3000	3080	3160	3240	3320	3400	3480	3560	3640

Partie 3 : méthode graphique

1. Dans un repère du plan, déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système \mathcal{P} de la partie 1. On hachurera les demi-plans qui ne conviennent pas.
2. Déterminer une équation de la droite \mathcal{D} correspondant à une dépense d de 5 500 €, puis représenter \mathcal{D} dans le repère précédent.
3. Déterminer graphiquement le couple à coordonnées entières qui assurera la dépense minimale (préciser la méthode utilisée). Quelle est alors la dépense en euros ?