

# Modèle de Leslie

**Niveau :** terminale ES spé. Partie A : TP sur poste informatique. Partie B : sur table ou en devoir en temps libre.

**Lien avec le programme :** Phénomènes évolutifs (variation d'une population). Matrice carrée, opérations. Graphe pondéré, matrice d'adjacence associée à un graphe. Utilisation d'un tableur. Algorithme. Suite géométrique et croissance exponentielle (tronc commun).

**Lien avec *Les maths au quotidien* :** Dynamique de populations (voir « Classes d'âge » dans l'ouvrage).

On s'intéresse à une population de rongeurs ayant une longévité maximale de 3 ans.

On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles.

On suppose que dans cette population, chaque femelle vivant 3 ans donne en moyenne naissance à 9 femelles durant la 1<sup>re</sup> année, à 11 femelles durant la 2<sup>e</sup> année et 5 femelles la 3<sup>e</sup> année.

Cependant, un rongeur sur trois survit au-delà de sa 1<sup>re</sup> année et seul 25 % de ceux qui survivent la 2<sup>e</sup> année survivront jusqu'à la 3<sup>e</sup> année.

Par commodité, une femelle est dite « juvénile » (J) si elle est dans sa première année, « pré-adulte » (P) si elle est dans sa seconde année et « adulte » (A) si elle est dans sa troisième année.

En 2018, cette population de rongeurs comportait 51 juvéniles, 20 pré-adultes et 7 adultes.

*On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.*

*On suppose dans ce modèle que les souris n'ont ni problème de place ni de nourriture.*

**Partie A :** étude de l'évolution de la population à l'aide d'un tableur.

1. a. Réaliser cette feuille de calcul. Saisir la formule adéquate dans la cellule F2 ; puis les formules adéquates dans la plage B3:E3, puis recopier vers le bas. C1, C3

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Total des femelles	Rapport
2	2018	0	51	20	7	78	
3	2019	1	714	17	5	736	9,44
4	2020	2					

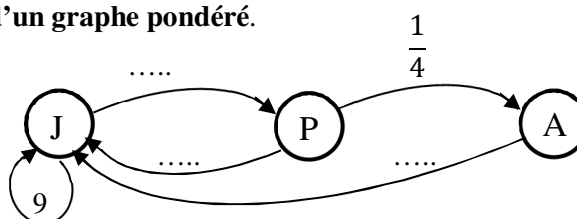


*Vous écrirez toutes les formules entrées sur votre copie.*

- b. Déterminer avec le logiciel le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2032. C2
- c. Le logiciel montre que la population croît très vite. Pour avoir une idée du type d'évolution de cette population, représenter dans une fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant à la population totale sur plusieurs périodes de 6 années (comme 2018-2023, 2029-2034 ou 2041-2046 par exemple). C3  
De quel type d'évolution s'agirait-il ? C1, C5
- d. Pour étayer ou infirmer la conjecture de la question 1. c., on décide de faire apparaître dans la colonne G les rapports entre le nombre total de rongeurs femelles et celui de l'année précédente.
- Saisir en G3 la formule donnant, par recopie vers le bas, ce rapport au cours des années suivantes. C3
  - Quelle conjecture peut-on émettre sur l'évolution de ce rapport ? C1
  - Expliquer alors pourquoi on peut parler de croissance asymptotiquement exponentielle. C2, C5

**Partie B :** étude de l'évolution de la population à l'aide d'un graphe pondéré.

1. a. Compléter le graphe pondéré ci-contre traduisant la situation.



- b. Donner la matrice  $M$  de projection de la population associée à ce graphe, en choisissant comme ordre des sommets : J, P, A. Elle est construite de manière analogue à la matrice de transition d'un graphe probabiliste.  
**La matrice  $M$  est appelée la matrice de Leslie du modèle.** C1

c. Si l'on désigne respectivement par  $j_n, p_n$  et  $a_n$  le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en  $2018 + n$ , justifier que la situation peut se traduire par le système ci-contre :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 9j_n + 11p_n + 5a_n \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}j_n \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}p_n \end{cases}$$

**C2, C5**

d. En notant  $X_n$  la matrice ligne  $(j_n \ p_n \ a_n)$  donnant la répartition de la population en  $2018 + n$ , vérifier que  $X_{n+1} = X_n \times M$ . **C3**

e. Montrer que  $X_2 = X_0 \times M^2$ . **C4**

f. On admet que pour tout nombre entier naturel  $n, X_n = X_0 \times M^n$ .  
En déduire le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2033. **C4**

2. Compléter l'algorithme suivant, afin qu'il affiche en sortie le nombre de juvéniles l'année  $2018 + n$ , pour un entier naturel non nul  $n$  entré par l'utilisateur.

**C3**

```

Saisir .....
j ← 51
p ← .....
a ← .....
Pour i allant de ..... à ..... :
    d ← j
    j ← .....
    a ← .....
    p ← .....
Afficher .....
    
```

**Point info :** le statisticien anglais P. H. Leslie a développé en 1945 ce modèle pour décrire l'évolution du nombre de femelles chez les rongeurs qui provoquent de gros dégâts dans les réserves alimentaires (rats et souris). De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes et son usage est facilité par l'emploi d'ordinateurs.

**Dans ce document apparaissent en particulier les compétences suivantes :**

COMPETENCES ATTENDUES		Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition			
			-			+
<b>C1</b> <b>Chercher</b>	Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. Emettre une conjecture.	A.1.a. A.1.c. A.1.d. B.1.b.				
<b>C2</b> <b>Modéliser</b>	Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de graphes) Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Valider ou invalider un modèle	A.1.b. A.1.c. A.1.d. B.1.a. B.1.c.				
<b>C3</b> <b>Calculer</b>	Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (tableur, calculatrice). Mettre en œuvre un algorithme simple.	A.1.a. A.1.c. A.1.d. B.1.d. B.2.				
<b>C4</b> <b>Raisonner</b>	Effectuer des inférences (déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision	B.1.e. B.1.f.				
<b>C5</b> <b>Communiquer</b>	Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.	A.1.c. B.1.c. A.1.d.				