Comment retrouver la transformation de Lorentz avec trois hypothèses physiques de base et un peu de mathématiques ?

Matthieu Colonval - Lycée Benjamin Franklin, Orléans

Les **équations de Maxwell**, aussi appelées **équations de Maxwell-Lorentz**, sont des lois fondamentales de la physique qui constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz.

Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales.

Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830.

La synthèse de Maxwell a permis ultérieurement les deux plus grandes avancées de la physique moderne :

- la théorie de la relativité restreinte
  (via le problème du référentiel de l'hypothétique éther).

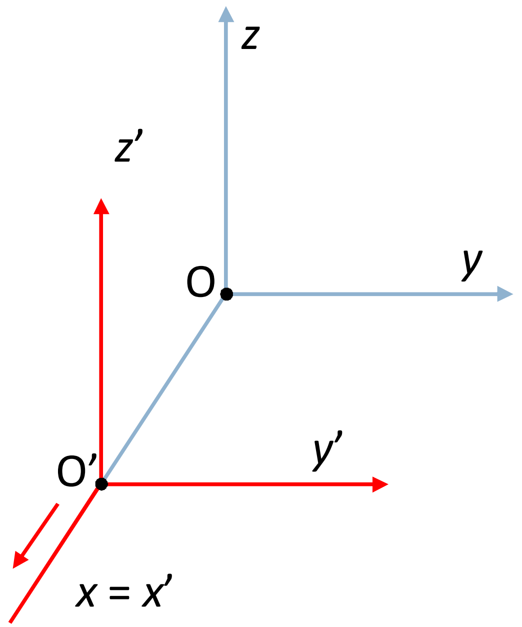
Les équations de Maxwell permettent de prédire que la vitesse des ondes électromagnétiques, *c*, est égale à celle de la lumière, mesurée expérimentalement (voir expérience de Michelson-Morley). Cela a permis de conclure que la lumière était une onde électromagnétique. Le fait que *c* soit la même dans toutes les directions et indépendante du référentiel, conclusion que l'on tire de ces équations, est un des fondements de la théorie de la relativité restreinte. Si l'on change de référentiel, le changement de coordonnées classique ne s'applique pas aux équations de Maxwell, il faut utiliser une autre transformation :

La transformation de Lorentz

- la physique quantique.

L'étude de la lumière et des ondes électromagnétiques, avec notamment les travaux de Max Planck sur le corps noir et d'Heinrich Hertz sur l'effet photoélectrique, donna naissance à la théorie quantique en 1900.

Transformation donnant les coordonnées spatiales et temporelle entre deux référentiels inertiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre

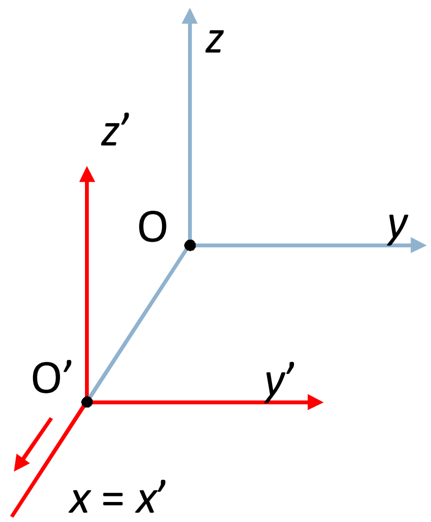


Transformation entre deux référentiels inertiels

On considère deux référentiels inertiels R et R', d'origine O et O' et dont les axes (O*x*) et (O'*x*') coïncident. On ne raisonne que sur cet axe, les deux autres directions de l'espace sont supposées communes pour simplifier (on peut s'y ramener par rotation et translation).

Leurs horloges marquent respectivement un temps t et t' et O' s'éloigne de O à la vitesse v constante (vue de O) : nos deux référentiels sont bien en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

Considérons une particule M sur l'axe (O*x*). Elle a pour coordonnée (t, x) dans le référentiel R et (t', x') dans le référentiel R'.



Le but est d'exprimer x' et t' en fonction de x et de t...

Transformation entre deux référentiels inertiels

Prenons trois postulats tout à fait raisonnables liés aux référentiels inertiels :

1. On postule que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres (isotropie de l'espace).

2. On suppose que l'espace et le temps sont homogènes : pas de direction ni d'instant privilégiés.

3. On postule que l'on sait synchroniser toutes les horloges d'un même référentiel : à un instant donné elles indiquent toutes la même heure.

Transformation entre deux référentiels inertiels

On suppose que les deux référentiels coïncident pour $t = 0$, et sont en mouvement rectiligne uniforme à vitesse v.

Du fait de l'homogénéité du temps et de l'espace, pour qu'un mouvement rectiligne uniforme dans l'un soit un mouvement rectiligne uniforme dans l'autre, la transformation qui permet de passer des coordonnées (t, x) aux coordonnées (t', x') est nécessairement **une transformation linéaire** :

$$t' = a(v)t + b(v)x$$
$$x' = c(v)t + d(v)x$$

C'est-à-dire qu'on a une matrice 2×2, dont les coefficients dépendent de la vitesse v telle que :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix}}^{T(v)} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

En mécanique classique par exemple, on a $t = t'$ et $x' = x - vt$, ce qui correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix}$. Cette transformation est celle dite de Galilée.

Transformation entre deux référentiels inertiels

Considérons donc T(v) matrice de la transformation qui, aux coordonnées de temps et d'espace (t, x) du point M dans le repère R, associe les coordonnées de temps et d'espace (t', x') de M dans le repère R', ce dernier ayant une vitesse v constante par rapport à R.
On va demander à T de posséder des propriétés très naturelles d'un point de vue physique :

- Si la vitesse v est nulle, alors R = R' et T est la matrice identité.

- S'il est possible de passer des coordonnées (t, x) aux coordonnées (t', x'), alors il est possible de passer des coordonnées (t', x') aux coordonnées (t, x) .
T est donc inversible et par symétrie, le repère R allant à un vitesse $-v$ par rapport à R', on a :

$$\mathbf{T}(v)^{-1} = \mathbf{T}(-v).$$

Transformation entre deux référentiels inertiels

- Considérons un troisième repère R'' en translation uniforme par rapport à R' (même direction) ayant une vitesse *v'* par rapport à R'.

Notons v'' = *v*♥*v'* la vitesse de R'' par rapport à R (qui dépend de v et v').

Lorsque l'on applique successivement la transformation de coordonnées R à R' (vitesse *v*) puis de R' à R'' (vitesse *v'*) cela correspond à la transformation de coordonnées du repère R vers le repère R'' (vitesse *v*♥*v'*).

Autrement dit, **T(*v'*) T(*v*) = T(*v*♥*v'*)**

Enfin, lorsqu'on a quatre repères R, R', R'' et R ''', chacun en translation uniforme les uns par rapport aux précédents avec les vitesses respectives *v*, *v'* et *v''*, et que l'on souhaite calculer les coordonnées (*t'''*, *x'''*) dans le repère R''' en fonction des coordonnées (*t*, *x*) dans le repère R, on peut calculer indifféremment **(**T(*v*) T(*v'*)**)** T(*v''*) ou T(*v*) **(**T(*v'*) T(*v''*)**)** (associativité).

Transformation entre deux référentiels inertiels

En résumé, on dit que l’ensemble des transformations de coordonnées entre deux repères inertiels en translation uniforme forme un groupe :
l'opération de groupe étant la composition des transformations (en effectuant une transformation après l'autre).

Un groupe est un couple dont le premier terme est un ensemble *G* et le second une opération (on dit aussi *loi de composition*) sur cet ensemble « • » qui, à deux éléments *a* et *b* de G, associe un autre élément *a* • *b*.

Le symbole « • » est un signe général qui désigne une opération donnée, comme l’opération ♥ ci-dessus.

On exige que la loi satisfasse quatre axiomes.

Transformation entre deux référentiels inertiels

Loi de composition interne

Pour tous a et b éléments de G, le résultat $a \bullet b$ est aussi dans G.

Associativité

Pour tous éléments a, b et c de G, l'égalité $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ est vraie.

Élément neutre

Il existe un élément e de G tel que, pour tout a dans G, $e \bullet a = a \bullet e = a$, "e" est appelé *élément neutre* du groupe $(G, \bullet)$.

Symétrique

Pour tout élément a de G, il existe b dans G tel que $a \bullet b = b \bullet a = e$, où e est l'élément neutre. b est appelé *symétrique* de a.

Exemples et contre-exemples…

Détermination de la transformation T(ν) grâce à la structure de groupe

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

On rappelle que $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

Examinons maintenant le mouvement de l'origine O' du repère R' :
Dans le repère R' il a des coordonnées (t', x' = 0)
Dans le repère R, il a des coordonnées (t, $x = vt$) .

On a donc : $\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix}$

En calculant : $0 = c(v)t + d(v)vt$ donc $\boldsymbol{c(v) = -d(v)v}$ **(1)**

De même pour le point O :
Dans le repère R' il a des coordonnées (t', $x' = -vt'$)
Dans le repère R il a des coordonnées (t, 0).

On a donc : $\begin{pmatrix} t' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

Et donc $\boldsymbol{t' = a(v)t}$ et $\boldsymbol{-vt' = c(v)t}$ **(2)**

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

$c(v) = -d(v)v$ **(1)**

$t' = a(v)t$ et $-vt' = c(v)t$ **(2)** (lorsque M = O)

Donc par **(2)** : $c(v) = -a(v)v$

Et par **(1)** : $\boldsymbol{d(v) = a(v)}$.

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ -a(v)v & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Notons que les repères coïncidant pour $t = 0$, t et t' ont même signe et comme $t' = a(v)t$ lorsque M = O ($x = 0$), **$a(v)$ est toujours positif**.

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ -a(v)v & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Le postulat d'homogénéité de l'espace suppose que si l'on gradue (Ox) et (Ox') en sens inverse, on passe des coordonnées ($-x'$) aux coordonnées ($-x$) par les mêmes équations. v devient $-v$ mais t et t' ne changent pas. On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} t' \\ -x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ a(-v)v & a(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix}$$

$-x' = a(-v)\ [-x + vt]$ soit $x' = a(-v)\ [x - vt]$

$t' = a(-v)\ [t - b(-v)x]$ $t' = a(-v)\ [t - b(-v)x]$

Or $x' = a(v)\ [x - vt]$ et $t' = a(v)\ [t + b(v)x]$

On en conclut que $\boldsymbol{a(-v) = a(v)}$ et $\boldsymbol{b(-v) = -b(v)}$

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

T $(v)^{-1}$ = T($-v$), c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ -a(v)v & a(v) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ a(-v)v & a(-v) \end{pmatrix}$$

T (v) étant inversible, **son déterminant $a(v)^2 + a(v)\,b(v)\,v$ est non nul** et :

$$\begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ -a(v)v & a(v) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a(v)^2 + a(v)b(v)v}\begin{pmatrix} a(v) & -b(v) \\ a(v)v & a(v) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{a(v)^2 + a(v)b(v)v}\begin{pmatrix} a(v) & -b(v) \\ a(v)v & a(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ a(-v)v & a(-v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -b(v) \\ a(v)v & a(v) \end{pmatrix}$$

On en déduit que **$a(v)^2 + a(v)\,b(v) = 1$**

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

Considérons un troisième repère R'' en translation uniforme par rapport à R' (même direction) ayant une vitesse v' par rapport à R'.

R'' a donc une vitesse $v \heartsuit v'$ par rapport à R.

$$T(v')\,T(v) = T(v \heartsuit v')$$

$$\begin{pmatrix} a(v') & b(v') \\ -a(v')v' & a(v') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ -a(v)v & a(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v \heartsuit v') & b(v \heartsuit v') \\ -a(v \heartsuit v') \times (v \heartsuit v') & a(v \heartsuit v') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(v')a(v) - b(v')a(v)v & a(v')b(v) + b(v')a(v) \\ -a(v')v'\,a(v) - a(v')a(v)v & -a(v')v'b(v) + a(v')a(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v \heartsuit v') & b(v \heartsuit v') \\ -a(v \heartsuit v') \times (v \heartsuit v') & a(v \heartsuit v') \end{pmatrix}$$

Les éléments diagonaux sont donc égaux :

$$\cancel{a(v')\,a(v)} - b(v')a(v)v = -a(v')v'b(v) + \cancel{a(v')a(v)}$$

Soit $\boldsymbol{b(v')\,a(v)\,v = a(v')\,v'\,b(v)}$

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

$b(v')\,a(v)\,v = a(v')\,v'\,b(v)$

De plus, comme $a(v)^2 + a(v)\,b(v) = 1$, on a $\boldsymbol{a(v) \neq 0}$ pour tout v.

Et pour v et v' non nuls : $\dfrac{b(v')}{a(v')v'} = \dfrac{b(v)}{a(v)v}$

Cette relation, vraie quelles que soient les vitesses v et v', traduit une relation de proportionnalité entre $b(v)$ et $a(v)v$:

Il existe une constante k telle que $\boldsymbol{b(v) = k\,a(v)v}$.

$$a(v)^2 + a(v)\,b(v) = 1 \Leftrightarrow a(v)^2 + k\,a(v)^2v^2 = 1 \Leftrightarrow a(v)^2 = \frac{1}{1 + kv^2}$$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + kv^2}}}$ car $a(v)$ est positif.

On a donc $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

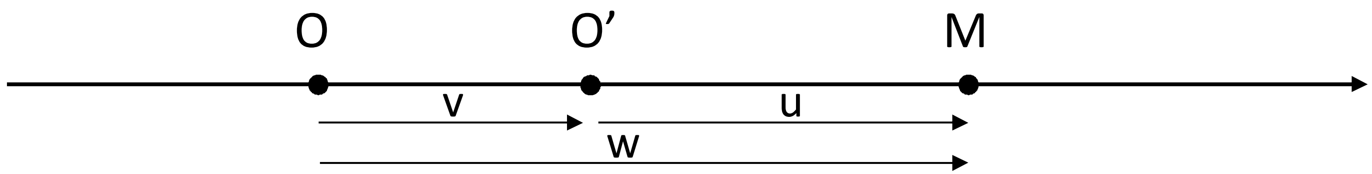
Considérons une particule M en mouvement uniforme sur l'axe (Ox).

La particule M a pour coordonnées (t, x) dans R et (t', x') dans R'.

D'après ce qui précède, on a : $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

Et donc : $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -kv \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$ car $\mathrm{T}(v)^{-1} = \mathrm{T}(-v)$.

Soit w la vitesse de M dans R et u la vitesse de M dans R'.
Par définition, $w = u \heartsuit v$:



Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -kv \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

On a : $x = w\,t$ et $x' = u\,t'$.

En remplaçant x' par $u\,t'$ dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -kv \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ u\,t' \end{pmatrix}$$

et en divisant membre à membre, on obtient :

$$\frac{x}{t} = \frac{u + v}{1 - k\,u\,v}.$$

Ce qui donne donc la loi de composition des vitesses :

$$\boldsymbol{w = u \heartsuit v = \frac{u + v}{1 - k\,u\,v}}$$

On notera que cette expression n'est pas forcément égale à $u + v$, comme on s'y attendrait en mécanique classique…

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Si $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0\times v^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0\times v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Les équations que l'on obtient sont tout simplement $x' = (x - vt)$ **et** $t' = t$.

On retrouve les **lois galiléennes** de passage d'un référentiel à l'autre, où le temps est absolu ($t' = t$), et la vitesse v de R' par rapport à R n'est pas limitée.

$$w = \frac{u + v}{1 - 0\,u\,v} = u + v$$

On retrouve la loi de composition des vitesses « classique ».

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

Si $k > 0$:

La « somme » de deux vitesses u et v s'écrit $w = \dfrac{u+v}{1 - k\,u\,v}$.

Supposons que u et v peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes :

Dès que $uv > \dfrac{1}{k}$, nous avons $1 - k\,u\,v < 0$ et w est négative.

Deux vitesses u et v toutes deux positives et très grandes, s' « additionnent » pour donner une vitesse négative : c'est absurde.

u et v ne peuvent donc pas prendre des valeurs arbitrairement grandes :

il existe une vitesse limite v_{max} telle que $v_{max}{}^2 < \dfrac{1}{k}$

Mais dans ce cas, pour $u = v = v_{max}$, $w = \dfrac{2v_{max}}{1 - k\,v_{max}{}^2} < v_{max}$

En simplifiant on obtient $\dfrac{2}{1 - k\,v_{max}{}^2} < 1$ puis $k\,v_{max}{}^2 < -1$ ce qui est impossible puisque $v_{max}{}^2$ et k sont positifs…

Conclusion : ***k* ne peut pas être positif**…

Détermination de T(v) grâce à la structure de groupe

Donc k est nécessairement négatif.

$$w = \frac{u + v}{1 - k\,u\,v}$$

w, $u + v$ ayant la dimension d'une vitesse, $1 - k\,u\,v$ est donc sans dimension et donc k a la dimension inverse du carré d'une vitesse.

On peut écrire $k = -\frac{1}{c^2}$, c étant une constante ayant la dimension d'une vitesse.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + k\,v^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Où la constante c est une vitesse limite, invariante dans tous référentiels inertiels en translation uniforme

Montrons que *c* est alors une vitesse limite que l'on ne peut dépasser :

On a $w = \dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$ (loi de composition des vitesses) et en prenant $v = u$:

$w = \dfrac{2u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}}$. D'un point de vue physique, **on doit avoir $w \geqslant u$**.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(u) = \dfrac{2u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}} = \dfrac{2c^2\,u}{c^2+u^2}$

f est dérivable et $f'(u) = \dfrac{2c^2\left(c^2+u^2\right) - 2u\,(2c^2u)}{(c^2+u^2)^2} = \dfrac{2c^2\left(c^2-u^2\right)}{(c^2+u^2)^2}$

u	0		c		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	

u	0		c		$+\infty$
$f(u)$		$\nearrow$	c	$\searrow$	

Si $u > c$, alors $w \leqslant c < u$. C'est absurde. **Donc $u \leqslant c$.**

Où la constante *c* est une vitesse limite, invariante dans tous référentiels…

Montrons que *c* est invariante dans tous les référentiels inertiels en translation uniforme et que c'est la seule.

En effet, quelque soit *v* la vitesse de R' par rapport à R, on a

$$\frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}} = u \quad \Leftrightarrow \quad u+v = u + \frac{u^2\,v}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad c^2\,v = u^2\,v \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u = c.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

où *c* est la vitesse limite, invariante dans tous les référentiels inertiels en translation uniforme.

Remarquez que l'on n'a pas parlé un instant de vitesse de la lumière ici !!!

Historiquement, on a effectivement trouvé une entité physique qui possédait la même vitesse dans toutes les directions quelque soit la vitesse de la source, il s’agit de la lumière…

Cette propriété a été mise en évidence par l'**expérience de Michelson-Morley,** qui a tenté de démontrer l'existence de l'éther luminifère.
Pour y parvenir, Albert Abraham Michelson et Edward Morley ont cherché à mettre en évidence la différence de vitesse de la lumière entre deux directions perpendiculaires et à deux périodes espacées de 6 mois, et concluent que cette différence était inférieure à ce que le dispositif permettait de mesurer.
En fait, il s'agit de toute une série d'expériences entre 1881 (Michelson seul) et 1887 (ensemble), date à laquelle le résultat est définitivement admis.

C'est dans l'histoire de la physique une des plus importantes et une des plus célèbres expériences, elle valut à Michelson le prix Nobel de physique en 1907.

Conclusion :

Dans la formule de transformation de Lorentz

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Facteur de Lorentz

c **est bien la vitesse de la lumière…**

FIN