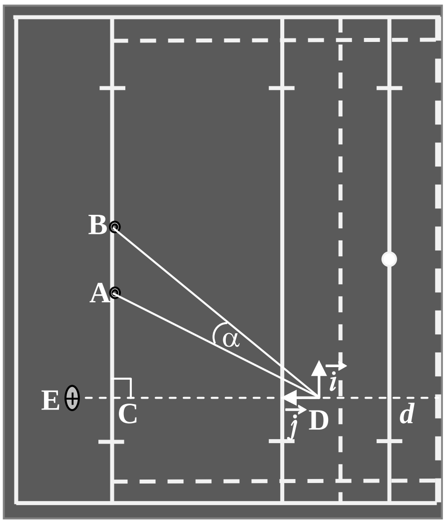
Transformation au rugby

Niveau : 1[re] S, devoir en temps libre.

Lien avec le programme : lieu géométrique dans le plan, produit scalaire dans le plan, trigonométrie, calcul formel, dérivée, minimum d'une fonction.

Lien avec *Les maths au quotidien* : **Sport / Rugby**.



Ce soir, c'est France-Angleterre au stade de France et Michalak marque un essai au point E (voir figure) et rapporte ainsi 5 points supplémentaires à la France. La règle stipule qu'un joueur français doit tenter de transformer l'essai pour marquer 2 points supplémentaires. Pour cela, le ballon doit être posé sur la droite *d*, perpendiculaire à (AB) passant par E, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. Soit D le point de *d* où l'on va poser le ballon et C l'intersection de (DE) et (AB). On suppose que le buteur n'a pas de problème de puissance. La transformation a le plus de chances de réussir pour une valeur de l'angle $\widehat{ADB}$ maximale (on néglige l'influence de la hauteur prise par le ballon sur l'angle de tir). Notons $\alpha = \widehat{ADB}$.

La question est alors : où doit-on placer le ballon ?

On se place dans le repère orthonormé direct $(D\,;\,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}$ vecteur normé directeur de la droite (AB), de même sens que $\overrightarrow{AB}$ (et donc $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{DC}$, de même sens que $\overrightarrow{DC}$).

Les distances sont exprimées en mètres. On pose $a = AC$ et $x = CD$. On a $AB = 5{,}6$.

1. Donner les coordonnées des points D, A et B dans ce repère.
2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$, dont l'une en fonction de α.
3. En déduire $\cos\alpha$ en fonction de a et de x.
4. Compléter la phrase suivante :
   À l'aide d'un cercle trigonométrique, j'observe que, comme la mesure principale de l'angle α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians, α est maximal quand $\cos\alpha$ est ……………………..
5. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + a(a+5{,}6)}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+(a+5{,}6)^2}}$.
   Voici une feuille de travail effectuée avec un logiciel de calcul formel.

```
(%i1) f(x):= (x^2+a*(a+5.6))/((sqrt(x^2+a^2)*sqrt(x^2+(a+5.6)^2)));
```

$$\text{(\%o1)}\quad f(x):=\frac{x^2+a\,(a+5.6)}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+(a+5.6)^2}}$$

```
(%i2) define(g(x),diff(f(x),x));
```

$$\text{(\%o2)}\quad g(x):=\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+(a+5.6)^2}}-\frac{x\,(x^2+a\,(a+5.6))}{(x^2+a^2)^{3/2}\,\sqrt{x^2+(a+5.6)^2}}-\frac{x\,(x^2+a\,(a+5.6))}{\sqrt{x^2+a^2}\,(x^2+(a+5.6)^2)^{3/2}}$$

```
(%i3) solve([g(x)=0], [x]);
rat: replaced 5.6 by 28/5 = 5.6
```

$$\text{(\%o3)}\quad \left[x=-\frac{\sqrt{5\,a^2+28\,a}}{\sqrt{5}},\ x=\frac{\sqrt{5\,a^2+28\,a}}{\sqrt{5}},\ x=0\right]$$

   La-commenter et expliquer pourquoi elle permet de répondre à la question initiale.
6. Répondre à la question initiale pour $a = 15$ puis pour $a = 25$.