

CÔNE DE MACH

Niveau : terminale S spécialité, devoir en temps libre.

Lien avec le programme : section d'un cône par un plan parallèle à un plan de coordonnées.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Transport.



La surface de la Terre est supposée localement plane. On considère un avion volant à vitesse supersonique sur une trajectoire rectiligne. On cherche à déterminer la trace du cône de Mach sur la surface du sol.

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Le plan (xOy) représente le plan du sol, le point $A(0, 0, h)$ la position de l'avion à un instant donné (h réel strictement positif), la droite \mathcal{D} passant par A et parallèle à (Oy) la trajectoire de l'avion.

Le demi-cône \mathcal{C} de sommet $A(0, 0, h)$, d'axe \mathcal{D} , d'angle α et situé dans le demi-espace caractérisé par $y > 0$ modélise le cône de Mach.

On rappelle que α est l'angle entre l'axe du cône et une génératrice de celui-ci.

Le problème se ramène donc à déterminer l'intersection \mathcal{H} du demi-cône \mathcal{C} et du plan (xOy) .

Soit M un point de \mathcal{C} et K le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .

1. Exprimer MK et AK en fonction des coordonnées (x, y, z) de M .
2. En déduire que M appartient à \mathcal{C} équivaut à : $x^2 + (z - h)^2 = y^2 \tan^2(\alpha)$ et $y > 0$
3. Donner une équation cartésienne du plan (xOy) puis une équation cartésienne de \mathcal{H} dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (xOy) . Quelle est la nature de \mathcal{H} ?