

# Évolution d'une population diploïde autogame

**Niveau :** terminale S spécialité mathématiques.

**Lien avec le programme : tronc commun :** probabilité, indépendance, arbre pondéré, activité algorithmique pour simuler une marche aléatoire ; **spécialité :** marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets, matrices carrées, matrices lignes : opérations. Matrice inverse d'une matrice carrée. Exemple de calcul de la puissance  $n$ -ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. Suite de matrices lignes  $(U_n)$  vérifiant une relation de récurrence du type  $U_{n+1} = AU_n$ , étude de la convergence, étude asymptotique d'une marche aléatoire.

**Document pluridisciplinaire. Lien avec la SVT :** Thème 1-A Génétique et évolution.

**Lien avec Les maths au quotidien :** Nature.



Une cellule biologique est **diploïde** lorsque les chromosomes qu'elle contient sont présents par paires ( $2n$  chromosomes). Une cellule compte alors deux allèles pour chacun de ses gènes (sauf chromosomes sexuels), les deux chromosomes d'une même paire possédant les mêmes gènes. Ces deux versions sont d'origine maternelle pour l'une et paternelle pour l'autre, et ont été rassemblées lors de la fécondation.

L'autofécondation est la fécondation d'un ovule par du pollen issu de la même plante. Les mécanismes qui interviennent sont le plus souvent d'ordre morphologique :

- Contact direct des stigmates (organes femelles) avec des étamines (organes mâles), ou proximité des deux organes reproducteurs.
- Protection vis-à-vis du pollen étranger, la fleur ne s'ouvrant pas ou peu.

Une plante qui s'autoféconde est dite **autogame** (blé, orge, riz, pois, tomate, haricot, café arabica...).

On s'intéresse ici à l'évolution de la structure génétique d'une population d'une espèce autogame diploïde.

Les individus de cette espèce pratiquent l'autofécondation, il va en résulter une évolution remarquable de la structure génétique de la population. Nous considérerons un gène bi-allélique : **AA, Aa ou aa**.

Chaque organe reproducteur mâle et femelle donne au descendant l'un de ses deux gènes avec équiprobabilité.

1. a. À l'aide d'un outil adapté, compléter : C1 C4 (a. et b.)

Les individus hétérozygotes ont des descendants :

AA avec la probabilité ..... ; Aa avec la probabilité ..... ; Aa avec la probabilité .....

b. Vérifier de même que les individus homozygotes ont des descendants homozygotes de la même catégorie.

Soient  $p_k, q_k, r_k$  les proportions d'individus AA, Aa, aa à la  $k^e$  génération et  $U_k$  la matrice ligne  $(p_k, q_k, r_k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

2. a. Montrer que  $U_{k+1} = U_k M$  où  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  C2

b. En déduire  $U_k$  en fonction de  $U_0, M$  et  $k$ . C5

3. Soit  $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

a. Montrer que  $N$  est inversible, d'inverse  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . C5 C3

b. Calculer  $D = N^{-1}MN$ . On pourra utiliser un outil numérique. C3

c. Montrer que  $M = NDN^{-1}$  et donner la formule permettant le calcul de  $M^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On précisera  $D^n$ .

4. a. En utilisant la formule précédente, un logiciel de calcul formel donne :

$$p_k = p_0 + (1 - 0,5^n) \times 0,5 q_0 \quad ; \quad q_k = 0,5^n q_0 \quad ; \quad r_k = r_0 + (1 - 0,5^n) \times 0,5 q_0$$

Déterminer la limite de  $U_k$ .

C3

b. Qu'en déduit-on pour la structure de la population ?

C2 C6

5. On suppose que  $p_0 = 0,06$ ,  $q_0 = 0,9$  et  $r_0 = 0,04$ .

a. Compléter l’algorithme suivant, afin qu’il affiche en sortie les probabilité  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $r_n$  pour un entier naturel non nul  $n$  entré par l’utilisateur. C4

```

Saisir .....
p ← .....
q ← .....
r ← .....
Pour i allant de ..... à .....
Début Pour
    ... ← .....
    ... ← .....
    ... ← .....
FinPour
Afficher .....
```

b. • Programmer cet algorithme en Python et joindre le script.  
 • Donner la sortie pour  $n = 5$ .

C3

6. Vu sur le net (site de France Inter)

C1 C6

Une étude parue fin 2017 dans la prestigieuse revue PNAS montre comment le réchauffement planétaire va probablement affecter l’environnement des caféiers d’Amérique Latine...

Pour effectuer ce travail les chercheurs ont fait mouliner leurs ordinateurs en modélisant les impacts du réchauffement avec un scénario à plus de deux degrés.

D’après leurs résultats, d’ici 2050, les zones d’Amérique latine dédiées au café pourraient être réduite de presque 90 % à cause du réchauffement climatique et ses conséquences sur les abeilles qui pollinisent les fleurs des caféiers... Les chercheurs préconisent donc **l’augmentation des pratiques agricoles favorables aux abeilles**.

Et l’étude ajoute que ce sont les meilleurs cafés qui vont être touchés : les fameux Arabicas qui représentent 85 % du total de la production sur ce continent.



Selon Benoît BERTRAND, chercheur au CIRAD de Montpellier et spécialiste de ces questions, **cette étude, qui s’intéresse essentiellement à l’avenir des cafés Arabica, est tout simplement fausse.**

Quelle raison simple avance-t-il pour affirmer cela ?

Dans ce document apparaissent en particulier les compétences suivantes :

COMPETENCES		Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition			
			-			+
<b>C1 Chercher</b>	Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.	1.a. 1.b. 6.				
<b>C2 Modéliser</b>	Traduire en langage mathématique une situation réelle, à l'aide d'équations, de suites, de graphes... Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	2.a. 4.b.				
<b>C3 Calculer</b>	Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel). Mettre en œuvre des algorithmes simples.	3.a. 3.b. 4.a. 5.b.				
<b>C4 Représenter</b>	Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique. Passer d'un mode de représentation à un autre.	1.a. 1.b. 5.a.				
<b>C5 Raisonner</b>	Déduire, conduire une justification. (Raisonnement par récurrence pour 2. b. si reformulation de la question et démonstration d'un résultat de cours)	2.b. 3.a.				
<b>C6 Communiquer</b>	Critiquer une démarche ou un résultat. S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.	4.b. 6.				