

Éclairage maximal

Niveau : terminale S.

Lien avec le programme : complément sur la dérivation, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$. Recours à un logiciel de calcul formel. Relation avec le programme de physique via le thème « Ondes lumineuses ».

Lien avec Les maths au quotidien : Bricolage.

Partie A

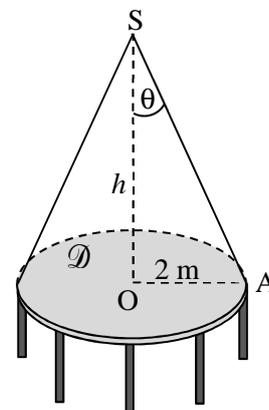
Une manufacture chinoise a installé dans son atelier une grande table circulaire de 4 m de diamètre, autour de laquelle les ouvriers vont travailler. Le chef d'atelier souhaite installer une lampe au-dessus du centre de la table et se demande à quelle hauteur la placer pour que l'éclairage du bord de la table soit maximal.

La face supérieure du plateau de la table est un disque \mathcal{D} de centre O et de rayon 2 m. Sur la perpendiculaire en O au plan du disque, l'entreprise veut placer une source lumineuse S.

Il s'agit donc, de déterminer la hauteur h à laquelle il faut placer S pour que l'éclairage en un point A du bord du disque soit maximal.

La loi qui régit l'éclairage est la suivante :

L'éclairage en A est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence θ et inversement proportionnel au carré de la distance AS.



Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que l'éclairage au bord de la table est proportionnel à $\frac{h}{(\sqrt{h^2 + 4})(h^2 + 4)}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 4})(x^2 + 4)}$.

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = (\sqrt{x^2 + 4})(x^2 + 4).$$

Voici une feuille de calcul élaborée avec un logiciel de calcul formel.

a. Calculer $g'(x)$ et retrouver l'expression obtenue à l'issue de la deuxième instruction.

b. Retrouver alors l'expression de $g'(x)$ obtenue à l'issue de la troisième instruction.

1	<code>g(x) := (sqrt(x^2 + 4)) * (x^2 + 4)</code>
	$x \rightarrow (\sqrt{x^2 + 4})(x^2 + 4)$
2	<code>g'(x)</code>
	$\frac{x(x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} + 2x(\sqrt{x^2 + 4})$
3	<code>simplifier(g'(x))</code>
	$3x(\sqrt{x^2 + 4})$

2. Voici une deuxième feuille de calcul.

Aide : $\text{diff}(g(x), x)$ désigne $g'(x)$

a. Rappeler la formule permettant le calcul du résultat de la deuxième instruction.

b. En utilisant ce résultat (2^e instruction), montrer

que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4})(4 - 2x^2)}{(x^2 + 4)^3}$.

1	<code>f(x) := x/g(x)</code>
	$x \rightarrow \frac{x}{g(x)}$
2	<code>f'(x)</code>
	$\frac{g(x) - x \cdot \text{diff}(g(x), x)}{(g(x))^2}$

3. Étudier les variations de f .

4. Répondre à la problématique du chef d'atelier.

Dans ce devoir apparaissent en particulier les capacités et compétences suivantes :

CAPACITÉS ATTENDUES

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	
--	--

COMPETENCES ATTENDUES

Chercher : Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. S'engager dans une démarche.	
Modéliser : Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide de fonctions). Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	
Calculer : Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.	
Raisonner : Effectuer une inférence pour prendre une décision.	
Communiquer : Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit. S'exprimer avec clarté et précision à l'écrit.	

Dans ce devoir apparaissent en particulier les capacités et compétences suivantes :

CAPACITÉS ATTENDUES

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	
--	--

COMPETENCES ATTENDUES

Chercher : Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. S'engager dans une démarche.	
Modéliser : Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide de fonctions). Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	
Calculer : Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.	
Raisonner : Effectuer une inférence pour prendre une décision.	
Communiquer : Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit. S'exprimer avec clarté et précision à l'écrit.	

Dans ce devoir apparaissent en particulier les capacités et compétences suivantes :

CAPACITÉS ATTENDUES

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	
--	--

COMPETENCES ATTENDUES

Chercher : Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. S'engager dans une démarche.	
Modéliser : Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide de fonctions). Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	
Calculer : Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.	
Raisonner : Effectuer une inférence pour prendre une décision.	
Communiquer : Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit. S'exprimer avec clarté et précision à l'écrit.	

Dans ce devoir apparaissent en particulier les capacités et compétences suivantes :

CAPACITÉS ATTENDUES

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	
--	--

COMPETENCES ATTENDUES

Chercher : Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. S'engager dans une démarche.	
Modéliser : Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide de fonctions). Utiliser, comprendre une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	
Calculer : Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un logiciel. Exercer l'intelligence du calcul, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.	
Raisonner : Effectuer une inférence pour prendre une décision.	
Communiquer : Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit. S'exprimer avec clarté et précision à l'écrit.	